MODUL PEMBELAJARAN

KALKULUS II

Drs. SUJIRAN, M.Pd.

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FPMIPA

IKIP PGRI BOJONEGORO

2017

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmatnya sehingga modul pembelajaran matakuliah kalkulus II ini selesai disusun. Modul ini digunakan sebagai salah satu media pembelajaran guna menunjang terlaksananya proses perkuliahan matakuliah Kalkulus II.

Di dalam modul pembelajaran ini terdapat uraian materi, contoh soal, latihan soal, kegiatan diskusi, yang dapat memudahkan mahasiswa memahami konsep dari materi Kalkulus II. Modul ini bukan satu-satunya media untuk belajar bagi mahasiswa, sehingga diharapkan didampingi dengan buku teks, handout, dan sumber lain yang relevan.

Kritik dan saran yang membangun penulis harapkan dari berbagai pihak demi perbaikan untuk penyusunan modul berikutnya.

Penulis

DAFTAR ISI

BAB 1
INTEGRAL

A. Anti Turunan (Integral Tak-Tentu)

Jika anda mengenakan sepatu anda, anda dapat melepasnya lagi. Operasi yang kedua menghapuskan yang pertama, mengembalikan sepatu pada posisi semula. Dikatakan dua operasi tersebut adalah *operasi balikan (invers).* Kita telah mengkaji pendiferensialan (turunan) pada mata kuliah Kalkulus I, selanjutnya sekarang ini kita mempelajari balikan (invers) dari pendiferensialan, yang disebut *anti pendiferensialan (*anti turunan).

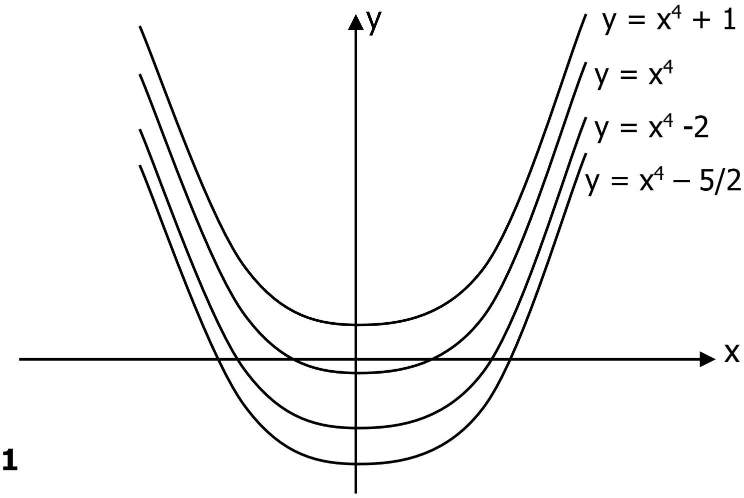
Definisi

F disebut suatu anti turunan dari f pada selang I jika F′(x) = f(x) untuk semua x dalam I. (Jika x suatu titik ujung dari I, F′(x) hanya perlu berupa turunan satu sisi).

Contoh

Tentukan suatu anti turunan dari fungsi $f(x) = 4x^3$ pada (-~, ~)

<u>Jawab</u> : Dari pengalaman kita dalam pendiferensialan, kita peroleh bahwa fungsi F yang memenuhi $F'(x) = f(x) = 4x^3$ untuk semua x riil adalah $F(x) = x^4 + C$, dengan C konstanta sebarang. Jadi $F(x) = x^4 + C$ merupakan suatu anti turunan dari $f(x) = 4x^3$ pada (-~, ~), lihat Gambar 1 berikut.



Gambar 1

Untuk menunjukkan anti turunan terhadap x digunakan lambang ∫ ……… dx. Demikian kita dapat menuliskan :

$$\int 4x^3\,dx = x^4 + C$$

Perhatikan bahwa $D_x \int 4x^3\, dx = D_x (x^4 + C) = 4x^3$, dan secara umum dinyatakan $D_x \int f(x)\, dx = f(x)$.

Latihan Soal

Tentukan 3 (tiga) fungsi yang berbeda, kemudian masing-masing anda tentukan anti turunannya menurut definisi di atas, kemudian gambarlah grafiknya!
Tulis jawaban anda pada lembar berikut!

Teorema 1

Jika r adalah sebarang bilangan rasional kecuali -1, maka

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

Bukti : $D_x\left[\frac{x^{r+1}}{r+1} + C\right] = (r+1).\frac{1}{r+1}x^r = x^r$

Contoh

Tentukan anti turunan dari f(x) = $x^{2/3}$

<u>Jawab</u> :

$$\int x^{2/3}dx = \frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}x^{5/3} + C$$

Latihan Soal

Tentukan anti turunan dari fungsi berikut menurut teorema di atas!

1. $f(x) = x^7$ 2. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ 3. $f(x) = x^{-\frac{4}{5}}$ 4. $f(x) = x^{-2}$

Tulis jawaban anda pada lembar berikut!

Teorema 2 $\int \sin x\, dx = -\cos x + C \quad dan \quad \int \cos x\, dx = \sin x + C$

Bukti : Turunkan ruas kanan dari masing – masing bentuk tersebut, coba anda lakukan !

Teorema 3

Andaikan fungsi f dan g mempunyai anti turunan dan andaikan k suatu konstanta . Maka :

$$1.\ \int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$2.\ \int \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$3.\ \int \left(f(x)-g(x)\right)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

Contoh

Hitung: $1)\int (2x^2+3x)\,dx,\quad 2)\int (x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}-5x)\,dx,\quad 3)\int (x^{-2}+x^{\frac{1}{2}})\,dx$

$$\begin{aligned}
1.\ \int (2x^2+3x)dx &= \int 2x^2dx + \int 3xdx \\
&= 2\int x^2dx + 3\int xdx \\
&= 2\left(\frac{1}{3}x^3 + C_1\right) + 3\left(\frac{1}{2}x^2 + C_2\right) \\
&= \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2C_1 + 3C_2 \\
&= \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C
\end{aligned}$$

2. $\int \left(x^{3/2} + 2x^{1/2} - 5x\right)dx = \int x^{3/2}dx + 2\int x^{1/2}dx - 5\int x\,dx$

$$= \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{5}{2}x^2 + C$$

3. $\int \left(x^{-2} + x^{1/2}\right)dx = \int x^{-2}dx + \int x^{1/2}dx$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

Latihan Soal

Hitung integral berikut:

1. $\int (3x^3 + 2x^2 + x)\,dx,$ 2. $\int \left(\frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}y^{\frac{1}{4}}\right)dy,$ 3. $\int (3\sin t - 2\cos t)\,dt$

Teorema 4

Andaikan g suatu fungsi yang dapat didiferensialkan dan r suatu suatu bilangan rasional yang bukan -1. Maka

$$\int [g(x)]^r g'(x)\, dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

Contoh

Tentukan:

$a. \int (x^3 + 2x)^{15}(3x^2 + 2)\, dx, \quad b. \int \sin^9 x \cos x\, dx$

Jawab a :

$$\begin{aligned}
&Andai\ \ g(x) = x^3 + 2x \rightarrow g'(x) = (3x^2 + 2)\, dx \\
&\int (x^3 + 2x)^{15}(3x^2 + 2)\, dx = \int \left(g(x)\right)^{15} g'(x)\, dx \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \frac{\left(g'(x)\right)^{16}}{16} + C \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \frac{(x^3 + 2x)^{16}}{16} + C
\end{aligned}$$

Jawab b :

$$\begin{aligned}
&Andai\ \ g(x) = \sin x \rightarrow g'(x) = \cos x \\
&\int \sin^9 x \cos x\, dx = \int \left(g(x)\right)^9 g'(x)\, dx \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = \frac{\left(g(x)\right)^{10}}{10} + C \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = \frac{\sin^{10} x}{10} + C
\end{aligned}$$

Latihan Soal

$1. \int (x^2 - 4)^3\, 2x\, dx$

$2. \int 10x(5x^2 + 1)^6\, dx$

$3. \int \sin^4 x \cos x\, dx$

$4. \int 2(\sin^5 x^2)(x \cos x^2)\, dx$

Kerjakan pada lembar jawab berikut:

Berdasarkan Teorema 4, jika ditetapkan bahwa u = g(x), maka du = g'(x) dx sehingga dapat disimpulkan :

$$\int \left(g(x)\right)^r g'(x)\,dx = \int u^r\,du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1$$

Contoh

Tentukan : $a.\ \int (x^3+1)^7 x^2 dx,\ \ b.\ \int (x^5+3x^2)^7 (10x^4+12x)\,dx,$

Jawab a :

$$Andai\ \ u = x^3 + 1 \rightarrow du = 3x^2 dx \Leftrightarrow x^2 dx = \tfrac{1}{3} du$$

$$\Rightarrow \int (x^3+1)^7 x^2 dx = \int u^7 . \frac{1}{3} du = \frac{1}{3}\int u^7 du = \frac{1}{3}\left[\frac{u^8}{8} + C\right] = \frac{1}{24}u^8 + \frac{1}{3}C$$

$$= \frac{1}{24}(x^3+1)^8 + K$$

Jawab b :

$$Andai\ \ u = x^5 + 3x^2 \rightarrow du = (5x^4 + 6x)\,dx \Leftrightarrow 2du = (10x^4 + 12x)\,dx$$

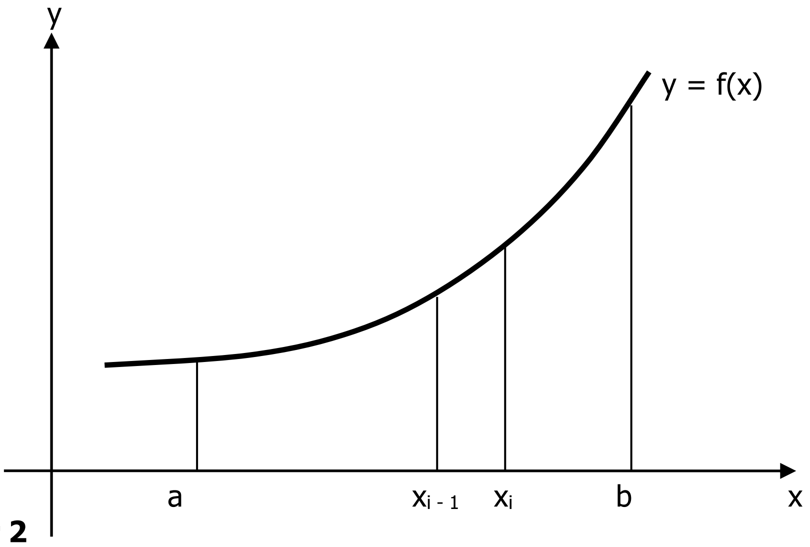
$$\Rightarrow \int (x^5+3x^2)^7 (10x^4+12x)\,dx = \int 2u^7 du = \frac{1}{4}u^8 + C = \frac{1}{4}(x^5+3x^2)^8 + C$$

Latihan Soal

1. $\int (5x^2+1)(5x^3+3x-8)^6\,dx$
2. $\int (\sin^5 x^2)(x\cos x^2)\,dx$
3. $\int x(x^2+1)^3\,dx$
4. $\int x^2(\cos^7 x^3)(\sin x^3)\,dx$

B. Integral Tentu

Dalam bagian ini diperkenalkan konsep integral tentu yang didasarkan pada konsep luas. Misalkan fungsi f kontinu pada [a, b], $f(x) \geq 0$ untuk setiap x didalam selang tersebut. Untuk menentukan luas daerah R yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = f(x)$, garis $x = a$, garis $x = b$ dan sumbu x , dilakukan dengan cara sebagai berikut:



Gambar 2

Partisi selang [a, b] menjadi n subselang dengan memilih titik-titik sebarang x_0, x_1, . . . x_n yang memenuhi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ dan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Buat jalur-jalur dengan cara menarik garis melalui titik-titik tersebut tegak lurus sumbu x dan memotong grafik $y = f(x)$.

Pilih sebarang titik c_i pada $[x_{i-1}, x_i]$, kemudian bentuklah persegipanjang-persegipanjang dengan panjang $f(c_i)$ dan lebar Δx_i , maka luasnya $f(c_i)\,\Delta x_i$.

Dengan demikian diperoleh jumlah luas persegipanjang-persegipanjang tersebut, yaitu : $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$.

Luas daerah R adalah : $L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ dan berdasarkan ini, Riemann mendefinisikan integral tentu sebagai berikut :

Definisi :

Jika fungsi f didefinisikan pada [a, b], maka integral tentu f dari a ke b ditulis $\int_a^b f(x)\,dx$ **dan didefinisikan** $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$

Jika limit ini ada maka dikatakan bahwa f terintegralkan pada selang [a, b].

Perhatikan sifat berikut :

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Pilihlah sekurang-kurangnya sebuah fungsi yang didefinisikan pada selang tertentu, kemudian buktikan bahwa sifat tersebut berlaku! Diskusikan, kemudian tuliskan jawaban anda pada lembar berikut:

C. Teorema Dasar Kalkulus

Misalkan f kontinu pada [a, b] dan F merupakan antiturunan dari f. Selanjutnya partisi [a, b] menjadi n subselang dengan menggunakan titik-titik a $= x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

$F(b) - F(a) = [F(x_n) - F(x_{n-1})] + \ldots + [F(x_2) - F(x_1)] + [F(x_1) - F(x_0)]$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i) - F(x_{i-1}) \right]$$

Menurut Teorema Rata-rata untuk Turunan,

$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)\,[x_i - x_{i-1}] = f(c_i)\,\Delta x_i$, untuk sebarang c_i pada selang $[x_{i-1}, x_i]$.

Dengan demikian dapat ditulis : $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$ . . . . *)

Dengan mengambil limit pada kedua ruas persamaan *) diperoleh

$$F(b) - F(a) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

Secara formal dinyatakan dalam teorema berikut :

Teorema 1: Jika f kontinu pada selang [a, b] dan F merupakan antiturunan dari f, maka $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Contoh :

1. Tunjukkan bahwa $\int_a^b k\,dx = k(b-a),\ k\ \text{konstanta}$

   Jawab: Andaikan F antiturunan dari f. Kita dapat menyatakan f(x) = k dan F(x) = kx, sehingga $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = kb - ka = k(b-a)$

2. Tunjukkan bahwa $\int_a^b x\,dx = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$

   Jawab: Andaikan F antiturunan dari f. Kita dapat menyatakan

$$f(x) = x \ dan\ F(x) = \tfrac{1}{2}x^2 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Untuk memudahkan dalam pehitungan integral tentu perlu diperkenalkan lambang baru dari F(b) – F(a), yaitu $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

Contoh:

1. Hitung $\int_1^2 (2x - 3x^2)\,dx$

   Jawab :

$$\int_1^2 (2x - 3x^2)\,dx = x^2 - x^3\Big|_1^2 = (4-8) - (1-1) = -4$$

2. Hitung $\int_1^8 (x^{1/2} + x^{1/3})\,dx$

   Jawab :

$$\int_1^8 (x^{2/3} + x^{1/3})\,dx = \frac{3}{5}x^{5/3} + \frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_1^8 = \left(\frac{3}{5}.32 + \frac{3}{4}.16\right) - \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{93}{5} - \frac{45}{4} = 18{,}6 - 11{,}25 = 7{,}35$$

3. Hitung $\int_0^{\pi/2} 2\cos x\,dx$

   Jawab :

$$\int_0^{\pi/2} 2\cos x\,dx = 2\sin x\Big|_0^{\pi/2} = 2 - 0 = 2$$

Latihan Soal

1. $\int_0^1 (x^2 + x)^3\,(2x+1)\,dx$, 2. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^3 x \cos x dx$,

3. $\int_{-3}^3 8t\sqrt{7 + 2t^2}\,dt$, 4. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (2x + \sin x)\,dx$

Teorema 2 : Andaikan f dan g terintegralkan pada [a, b] dan k konstanta maka :

(1) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

(2) $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

Contoh

Hitung $\int_1^2 (2x - 3x^2)\,dx$

Jawab :

$$\int_1^2 (2x - 3x^2)\,dx = \int_1^2 2x\,dx - \int_1^2 3x^2 dx = 2\int_1^2 x\,dx - 3\int_1^2 x^2\,dx$$

$$= 2\left[\left. \frac{1}{2}x^2 \right|_1^2 \right] - 3\left[\left. \frac{1}{3}x^3 \right|_1^2 \right] = 2\left(2 - \frac{1}{2} \right) - 3\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) 7 = 3 - 7 = -4$$

Latihan Soal

Hitunglah: 1. $\int_0^1 \left[x + (x^2 + 1)^2\, x \right] dx$ 2. $\int_0^1 (2x^4 - 3x^2 + 5)\,dx$

D. Sifat-sifat Integral Tentu Lebih Lanjut

Sifat-sifat dari integral tentu dinyatakan dalam bentuk teorema-teorema sebagai berikut :

Teorema 1 : Jika f terintegralkan pada suatu selang yang mengandung tiga titik a, b, dan c, maka

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \quad , bagaimanapun\ urutan\ dari\ a, b, dan\, c$$

Teorema 2 : Jika f dan g terintegralkan pada [a, b] dan jika f(x) ≤ g(x) untuk setiap x dalam [a, b] , maka

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

Teorema 3 : Jika f terintegralkan pada [a, b] dan jika m ≤ f(x) ≤ M untuk semua x dalam [a, b] , maka

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Teorema 4 : Andaikan f kontinu pada selang [a, b] dan andaikan x sebuah (variabel) titik dalam selang tersebut, maka

$$D_x\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x) \text{ atau } \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$

Contoh 1: Carilah $D_x\left[\int_1^x t^3\,dt\right]$

Jawab :

Cara I :

$$\int_1^x t^3 dt = \frac{1}{4}t^4\Big|_1^x = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}$$

Jadi, $D_x\left[\int_1^x t^3\,dt\right] = D_x\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}\right] = x^3$

Cara II :

Dengan menggunakan teorema 4 diatas, diperoleh :

$$D_x\left[\int_1^x t^3\,dt\right]=x^3$$

Contoh 2*:* Carilah $D_x\left[\int_x^1 t^2 dt\right]$

Jawab : $D_x\left[\int_x^1 t^2 dt\right]=D_x\left[-\int_1^x t^2 dt\right]=-D_x\left[\int_1^x t^2 dt\right]=-x^2$

Contoh 3*:* Carilah $D_x\left[\int_0^{x^2}(2t+1)\,dt\right]$

Jawab :

Misalkan u = x^2 diperoleh du/dx = 2x atau D_x u = 2x, sehingga ;

$$D_x\left[\int_0^{x^2}(2t+1)\,dt\right]=D_u\left[\int_0^{u}(2t+1)\,dt\right].D_x u=(2u+1).2x==(2x^2+1).2x=4x^3+2x$$

Latihan Soal

Tentukan G'(x), jika diketahui G(x) sebagai berikut:

$$1.\ G(x)=\int_x^1 x^2\sqrt{u^2+1}\,du,\quad 2.\ G(x)=\int_0^{\sin x}(u^2+\cos u)\,du$$

$$3.\ G(x)=\int_1^{x^2+1}\sqrt{2+\sin v}\,dv,\quad 4.\ G(x)=\int_x^{x^3}\sqrt{1+s^4}\,ds$$

Tulis jawaban anda pada lembar jawaban berikut:

E. Fungsi Logaritma Asli

Walaupun kelihatannya sederhana, $\int \frac{dx}{x}$ tidak dapat diselesaikan sebagaimana halnya integral dari fungsi polinom, rasional dan trigonometri yang sudah lazim kita kenal. Oleh karena itu, dicoba didefinisikan suatu fungsi baru yang dinamakan fungsi logaritma natural atau fungsi logaritma asli.

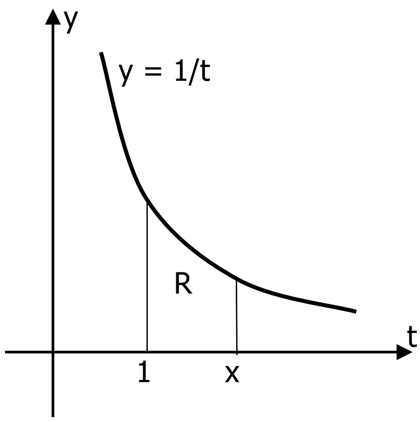
Definisi

Fungsi logaritma asli, ditulis sebagai $\ln$, didefinisikan dengan

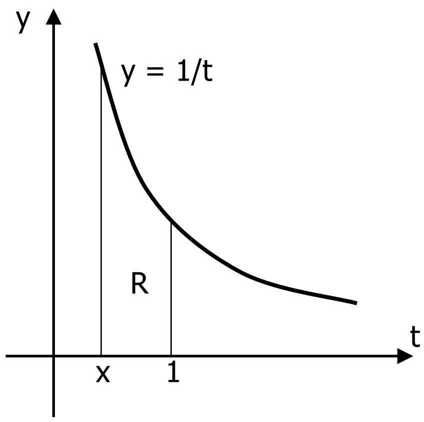
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0$$

Daerah definisinya adalah himpunan bilangan riil positif.

Gambar 2 menunjukkan arti geometri dari $\ln x$. Diagram pada Gambar 2 tersebut mengukur luas di bawah kurva y = 1/t antara 1 dan x jika x > 1 dan nilai negatif dari luas ini jika 0 < x < 1. Serta ln 1 = 0.



Jika x > 1, ln x = luas R



Jika 0 < x < 1, ln x = - luas R

Gambar 3

Selanjutnya dengan menggunakan *teorema 4* diatas, yakni *turunan suatu integral terhadap batas atasnya*, kita dapatkan :

$$D_x \ln x = D_x \left[\int_1^x \frac{1}{t}\,dt \right] = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Berdasarkan definisi diatas maka berlaku $\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$.

Perhatikan, apabila diketahui y = ln x^2 maka dengan menerapkan Aturan Rantai

didapat $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$, dan berlaku $\int \frac{2}{x}dx = 2\int \frac{dx}{x} = 2\ln x + C = \ln x^2 + C$

Dapat juga kita tuliskan $\int dy = \int \frac{2}{x}dx = 2\int \frac{dx}{x} \to y + c_1 = 2\ln x + c_2$

$$\Leftrightarrow y = \ln x^2 + (c_2 - c_1)$$

$$\Leftrightarrow y = \ln x^2 + C$$

F. Fungsi Eksponen Asli

Fungsi invers dari fungsi logaritma asli disebut sebagai fungsi eksponen asli dan ditulis e^x**.**

Didefinisikan y = ln x jika dan hanya jika x = e^y

Dengan demikian dapat ditulis

ln e^x = x dan $e^{\ln x}$ = x

Turunan dari y = e^x dapat diperoleh melalui turunan fungsi logaritma asli, yaitu

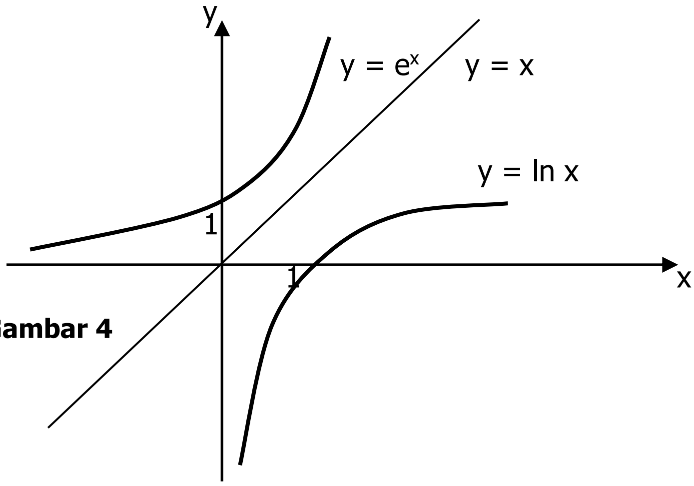
y = e^x yang berarti juga bahwa x = ln y, sehingga $dx = \frac{dy}{y}$ $atau$ $\frac{dy}{dx} = y = e^x$. Demikian halnya $\int e^x dx = e^x + C$

Grafik y = e^x adalah hasil pencerminan y = ln x terhadap garis y = x (gambar 3).

Definisi : Bilangan e adalah bilangan riil positif yang bersifat ln e = 1.

Beberapa sifat dari fungsi eksponen asli, untuk a dan b bilangan rasional :

1. e^0 = 1
2. e^a e^b = e^{a+b}
3. e^a/e^b = e^{a-b}



Gambar 4

Oleh karena fungsi exp dan ln adalah fungsi-fungsi yang saling berbalikan, maka fungsi exp x = e^x dapat diturunkan. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut :

Andaikan y = e^x, maka

x = ln y

Ruas kiri dan kanan diturunkan menurut x, diperoleh $1 = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$

Sehingga $\frac{dy}{dx} = y = e^x$

Dengan demikian terbukti bahwa turunan e^x adalah juga e^x.

Selanjutnya dari turunan e^x dapat menghasilkan rumus untuk integral sebagai berikut :

$$\int e^u du = e^u + C$$

3. Tentukan $\int e^{-2x} dx$

   Jawab : Andaikan u = -2x maka du = -2 dx, sehingga

$$\int e^{-2x} dx = \int e^u (-\frac{1}{2} du) = \int -\frac{1}{2} e^u du = -\frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

Latihan Soal

1. $\int e^{3x+1}\, dx$
2. $\int (x+3) e^{x^2+6x}\, dx$
3. $\int_0^1 e^{2x+3}\, dx$
4. $\int_1^2 \frac{e^{3/x}}{x^2}\, dx$

BAB 2
TEKNIK PENGINTEGRALAN

Didalam pengintegralan terdapat dua teknik dasar, yaitu **teknik substitusi** dan **teknik parsial**. Berikut ini akan diuraikan mengenai masing-masing teknik tersebut disertai dengan contoh-contoh soal.

A. Pengintegralan Dengan Penggantian (Teknik Substitusi)

Agar dapat menggunakan metode penggantian dengan hasil yang memuaskan, kita harus mengetahui bentuk-bentuk baku dalam pengintegralan. Beberapa diantara bentuk baku ini adalah sebagai berikut :

1. $\int k\, du = ku + C$

2. $\int u^r\, du = \begin{cases} \dfrac{u^{r+1}}{r+1} + C, & jika\ r \neq -1 \\ \ln|u| + C, & jika\ r = -1 \end{cases}$

3. $\int e^u\, du = e^u + C$

4. $\int a^u\, du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \neq 1, a > 0$

5. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$

6. $\int \cos u\, du = \sin u + C$

7. $\int \sec^2 u\, du = tg\ u + C$

8. $\int \cos ec^2 u\, du = -\cot u + C$

9. $\int \sec u\ tg\ u\, du = \sec u + C$

10. $\int \cos ec\ u\ \cot u\, du = -\cos ec\ u + C$

11. $\int tg\ u\, du = \ln|\sec u| + C$
$= -\ln|\cos u| + C$

12. $\int \cot u\, du = \ln|\sin u| + C$

13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arc\sin\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$

14. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arc\,tg\left(\dfrac{u}{a}\right) + c$

Teorema 1

Untuk menentukan ∫ f(x) dx, kita dapat mensubstitusi u = g(x), dengan *g* fungsi yang dapat diintegralkan. Apabila substitusi tersebut mengubah f(x) dx menjadi h(u) du dan apabila H sebuah antiturunan h, maka:

$$\int f(x)dx = \int h(u)du = H(u) + C = H(g(x)) + C$$

Contoh

1. Tentukan $\int \frac{2x}{\sin^2(x^2)}dx$

   Jawab : Andaikan u = x^2 , maka du = 2x dx . Sehingga :

$$\int \frac{2x}{\sin^2(x^2)}dx = \int \frac{du}{\sin^2 u} = \int \cos ec^2 u\, du = -\cot u + C = -\cot(x^2) + C$$

2. Tentukan $\int \frac{4}{\sqrt{9-16x^2}}dx$

   Jawab : Andaikan u = 4x, maka du = 4 dx. Sehingga :

$$\int \frac{4}{\sqrt{9-16x^2}}dx = \int \frac{du}{\sqrt{9-u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{3}\right) + C = \arcsin\left(\frac{4}{3}x\right) + C$$

3. Tentukan $\int \frac{e^x}{16+25e^{2x}}dx$

   Jawab : Andaikan u = $5e^x$, maka du = $5e^x$ dx. Sehingga :

$$\int \frac{e^x}{16+25e^{2x}}dx = \int \frac{\frac{1}{5}du}{16+u^2} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{16+u^2} = \frac{1}{5}.\frac{1}{4}arctg\left(\frac{u}{4}\right) + C$$

$$= \frac{1}{20}arctg\left(\frac{5e^x}{4}\right) + C$$

4. Tentukan $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

   Jawab : Andaikan u = 1/x , maka du = (- 1/x^2) dx. Sehingga :

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = -\int e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = -\int e^u\, du = -e^u + C = -e^{1/x} + C$$

5. Tentukan ∫ cosec x dx

Jawab:

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \frac{\sec x + tg\ x}{\sec x + tg\ x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x . tg\ x}{\sec x + tg\ x} dx$$

$$= \int \frac{d(\sec x + tg\ x)}{\sec x + tg\ x} = \ln \left| \sec x + tg\ x \right| + C$$

6. Tentukan ∫ cosec x dx

Jawab :

$$\int \cos ec\, x\ dx = \int \cos ec\ x \frac{\cos ec\, x - \cot\ x}{\cos ec\, x - \cot\ x} dx$$

$$= \int \frac{\cos ec^2\, x - \cos ec\, x \cot x}{\cos ec\, x - \cot x} dx = \int \frac{d(\cos ec\, x - \cot x)}{\cos ec\, x - \cot x}$$

$$= \ln \left| \cos ec\, x - \cot x \right| + C$$

Latihan Soal

1. Tentukan $\int x^2 \sqrt{x^3 - 17}\, dx$
2. Tentukan $\int \frac{a^{\cot x}}{\sin^2 x} dx$
3. Tentukan $\int \frac{3}{x^2 + 2x + 5} dx$
4. Tentukan $\int \frac{x^2 - x}{x + 1} dx$

Kerjakan pada lembar jawaban yang tersedia!

B. Integral Trigonometri

Terdapat lima jenis integral trigonometri yang sering muncul, yakni :

1. $\int \sin^n x\,dx \;\; dan \;\; \int \cos^n x\,dx$
2. $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$
3. $\int \tan^n x\,dx \;\; dan \;\; \int \cot^n x\,dx$
4. $\int \tan^m x \sec^n x\,dx \;\; dan \;\; \int \cot^m x \csc^n x\,dx$
5. $\int \sin mx \cos nx\,dx,\; \int \sin mx \sin nx\,dx,\; \int \cos mx \cos nx\,dx$

Masing-masing jenis dibahas melalui contoh – contoh soal berikut.

Jenis 1 Apabila n bilangan ganjil positif, maka kita keluarkan faktor sin x atau cos x, kemudian gunakan rumus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Apabila n genap positif, maka menggunakan rumus

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad atau \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Contoh

1. $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \int \sin x\,dx - \int \cos^2 x \sin x\,dx$

$$= \int \sin x\,dx + \int \cos^2 x\,d(\cos x) = -\cos x + \tfrac{1}{3}\cos^3 x + C$$

2. $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \tfrac{1}{2}\int dx + \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \tfrac{1}{2}\int dx + \tfrac{1}{2}\int \cos 2x.\tfrac{1}{2}d(2x)$

$$= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin 2x + C$$

3. $\int \sin^4 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \tfrac{1}{4}\int dx - \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \tfrac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx$

$$= \tfrac{1}{4}\int dx - \tfrac{1}{4}\int \cos 2x\,d(2x) + \tfrac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx = \tfrac{1}{4}\int dx - \tfrac{1}{4}\int \cos 2x\,d(2x) + \tfrac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\,dx$$

$$= \tfrac{3}{8}\int dx - \tfrac{1}{4}\int \cos 2x\,d(2x)x + \tfrac{1}{32}\int \cos 4x\,d(4x) = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

Latihan Soal

1. $\int \cos^3 x\,dx$ 2. $\int \sin^2 x\,dx$ 3. $\int \cos^4 x dx$

Jenis 2 Apabila m atau n bilangan ganjil positif, maka kita keluarkan faktor sin x atau cos x kemudian menggunakan rumus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Tetapi apabila m dan n genap positif, kita gunakan rumus

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad atau \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Contoh

1. $\int \sin^3 x \cos^{-\frac{1}{2}} x\, dx = \int \sin^2 x \cos^{-\frac{1}{2}} x \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^{-\frac{1}{2}} x . -d(\cos x)$

$$= -\int \cos^{-\frac{1}{2}} x\, d(\cos x) + \int \cos^{\frac{3}{2}} x\, d(\cos x)$$

$$= -2\cos^{\frac{1}{2}} x + \frac{2}{5}\cos^{\frac{5}{2}} x + C$$

2. $\int \sin^{-4} x \cos^3 x\, dx = \int \sin^{-4} x \cos^2 x \cos x\, dx = \int \sin^{-4} x (1-\sin^2 x)\, d(\sin x)$

$$= \int \sin^{-4} x\, d(\sin x) - \int \sin^{-2} x\, d(\sin x)$$

$$= -\frac{1}{3}\sin^{-3} x + \sin^{-1} x + C$$

$$= -\frac{1}{3}\csc^3 x + \csc x + C$$

3. $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x)\, dx$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1-\cos 2x - \tfrac{1}{2}(1+\cos 4x) + (1-\sin^2 2x)\cos 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 4x - \sin^2 2x \cos 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int \tfrac{1}{2}\, dx - \tfrac{1}{8}\int \cos 4x\, d(4x) - \tfrac{1}{2}\int \sin^2 2x\, d(\sin 2x)\right]$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$$

Latihan Soal

1. $\int \sin^{-\frac{1}{3}} x \cos^3 x\, dx$ 2. $\int \sin^3 x \cos^{-3} x\, dx$ 3. $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$

Kerjakan pada lembar jawaban berikut:

Jenis 3 Pada kasus tangen, kita keluarkan faktor $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$; sedangkan pada kasus cot kita keluarkan faktor $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$.

Contoh

1. $\int \tan^3 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\tan x\,dx = \int \tan x \sec^2 x\,dx - \int \tan x\,dx$

$$= \int \tan x\,d(tg\ x) - \int \tan x\,dx = \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln(\sec x) + C$$

2. $\int \cot^3 x\,dx = \int (\csc^2 x - 1)\cot x\,dx = -\int \cot x\,d(ctg\ x) - \int \cot x\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\cot^2 x - \ln(\sin x) + C$$

3. $\int \tan^4 x\,dx = \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1)\,dx = \int \tan^2 x \sec^2 x\,dx) - \int \tan^2 x\,dx$

$$= \int \tan^2 x\,d(\tan x) - \int (\sec^2 x - 1)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$$

Latihan Soal

1. $\int \tan^4 x\,dx$, 2. $\int \cot^4 x\,dx$, 3. $\int \tan^5 x\,dx$,

Jenis 4 Ada dua kemungkinan, yaitu : m ganjil dan n sebarang ; atau n genap dan m sebarang.

Contoh

1. $\int \tan^3 x \sec^{\frac{1}{2}} x\, dx = \int \tan^2 x \tan x \sec^{\frac{1}{2}} x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec^{\frac{1}{2}} x \tan x\, dx$

$$= \int \sec^{\frac{5}{2}} x \tan x\, dx - \int \sec^{\frac{1}{2}} x \tan x\, dx$$
$$= \int \sec^{\frac{3}{2}} x \sec x \tan x\, dx - \int \sec^{-\frac{1}{2}} x \sec x \tan x\, dx$$
$$= \int \sec^{\frac{3}{2}} x\, d(\sec x) - \int \sec^{-\frac{1}{3}} x\, d(\sec x)$$
$$= \frac{2}{5}\sec^{\frac{5}{2}} x - 2\sec^{\frac{1}{2}} x + C$$

2. $\int \tan^{-2} x \sec^4 x\, dx = \int \tan^{-2} x (\tan^2 x + 1)\sec^2 x\, dx = \int \sec^2 x\, dx + \int \tan^{-2} x\, d(\tan x)$

$$= \tan x - \tan^{-1} x + C$$

3. $\int \cot^3 x \csc^{-3} x\, dx = \int \cot^2 x \cot x \csc^{-3} x\, dx = \int (\csc^2 x - 1)\csc^{-3} x \cot x\, dx$

$$= \int \csc^{-1} x \cot x\, dx - \int \csc^{-3} x \cot x\, dx$$
$$= \int \csc^{-2} x \csc x \cot x\, dx - \int \csc^{-4} x \csc x \cot x\, dx$$
$$= -\int \csc^{-2} x\, d(\csc x) + \int \csc^{-4} x\, d(\csc x)$$
$$= \csc^{-1} x - \frac{1}{3}\csc^{-3} x + C$$

Latihan Soal

1. $\int \tan^5 x \sec^{-2} x\, dx$ 2. $\int \tan^{-\frac{1}{2}} x \sec^4 x\, dx$ 3. $\int \cot^5 x \csc^{\frac{1}{2}} x\, dx$

Jenis 5 Untuk integral jenis ini kita gunakan rumus sebagai berikut:

1. $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right)$
2. $\cos mx \sin nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x - \sin(m-n)x\right)$
3. $\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\right)$
4. $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + coc(m-n)x\right)$

Contoh

1. $\int \sin 3x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin 5x + \sin x\right) dx = \frac{1}{2}\int \sin 5x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin x\, dx$

$$= \frac{1}{10}\int \sin 5x\, d(5x) + \frac{1}{2}\int \sin x\, dx$$
$$= -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C$$

2. $\int \cos 3x \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin 5x - \sin x\right) dx = \frac{1}{2}\int \sin 5x\, dx - \frac{1}{2}\int \sin x\, dx$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

3. $\int \sin 5x \sin 7x\, dx = -\frac{1}{2}\int \left(\cos 12x - \cos(-2x)\right) dx = -\frac{1}{2}\int \left(\cos 12x - \cos 2x\right) dx$

$$= -\frac{1}{24}\int \cos 12x\, d(12x) + \frac{1}{4}\int \cos 2x\, d(2x) = -\frac{1}{24}\sin 12x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

4. $\int \cos 3x \cos 4x\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos 7x + \cos x\right) dx = \frac{1}{14}\sin 7x + \frac{1}{2}\sin x + C$

Latihan Soal

1. $\int \sin 5x \cos 3x\, dx$ 2. $\int \cos 7x \sin 3x\, dx$

3. $\int \sin 3x \sin 5x\, dx$ 4. $\int \cos 5x \cos 7x\, dx$

Kerjakan pada lembar yang telah tersedia berikut ini:

C. Substitusi Yang Merasionalkan

Bentuk akar dalam integran seringkali menimbulkan kesulitan untuk menyelesaikannya. Dengan suatu substitusi yang tepat, maka bentuk akar tersebut dapat dirasionalkan.

1. Integran Yang Memuat Bentuk $\sqrt[n]{ax+b}$

Apabila di dalam integran terdapat bentuk $\sqrt[n]{ax+b}$, maka substitusi yang digunakan adalah $u = \sqrt[n]{ax+b}$.

Contoh

1. Tentukan $\int \sqrt[3]{3x+4}\ dx$

   Jawab: Andaikan $u = \sqrt[3]{3x+4}$ $maka\, u^3 = 3x+4 dan\ 3u^2 du = 3dx$, Sehingga

$$\int \sqrt[3]{3x+4}\ dx = \int u.u^2\ du = \int u^3\ du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}(3x+4)\sqrt[3]{3x+4} + C$$

2. Tentukan $\int x\sqrt{2x+1}\,dx$

   Jawab : Andaikan $u = \sqrt{2x+1}$ $maka\, u^2 = 2x+1\ \ dan\ \ 2u\,du = 2\,dx$, sehingga

$$\int x\sqrt{2x+1}\ dx = \int \tfrac{1}{2}(u^2-1)u^2 du = \tfrac{1}{2}\int (u^4 - u^2)\,du$$

$$= \frac{1}{10}u^5 - \frac{1}{6}u^3 + C = \frac{1}{10}(2x+1)^2\sqrt{2x+1} - \frac{1}{6}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C$$

Latihan Soal

Hitunglah:

1. $\int \sqrt[5]{7x-3}\ dx$
2. $\int x\sqrt{5x+4}\,dx$
3. $\int x\sqrt[3]{x-1}\,dx$

2. Integran Yang Memuat Bentuk $\sqrt{a^2 - x^2}$

Apabila integran memuat bentuk tersebut maka substitusi yang digunakan adalah x = a sin t. Dengan substitusi ini akibatnya

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 x)} = \sqrt{a^2 \cos^2 t} = a \cos t$$

Agar substitusi ini memiliki invers, maka daerah asal kita batasi, yakni:

$$-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

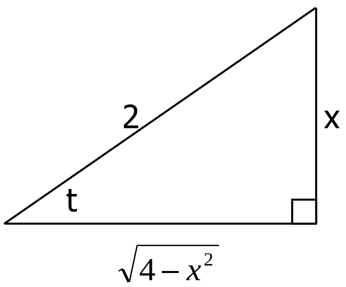
Contoh

1. Tentukan $\int \sqrt{4 - x^2}\ dx$

Jawab : Andaikan x = 2 sin t, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

Maka $dx = 2\cos t\, dt$ dan $\sqrt{4 - x^2} = 2\cos t$, sehingga

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4 - x^2}\ dx &= \int 2\cos t\ 2\cos t\, dt = 4\int \cos^2 t\ dt = 4\int \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2t)\, dt \\ &= 2\int (1 + \cos 2t)\, dt = 2\int dt + 2\int \cos 2t\, dt \\ &= 2t + \sin 2t + C \\ &= 2t + 2\sin t \cos t + C \\ &= 2\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + C\end{aligned}$$



$\sin t = \dfrac{x}{2}$ dan $\cos t = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{2}$

Gambar 1

2. Tentukan $\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\ dx$

Jawab : Andaikan x = 3 sin t , $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

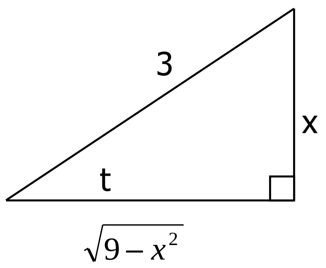
Maka $dx = 3\cos t\, dt$ *dan* $\sqrt{9 - x^2} = 3\cos t$

Sehingga

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\, dx = \int \frac{3\cos t}{9\sin^2 t} 3\cos t\, dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\, dt = \int \cot^2 t\, dt$$

$$= \int \left(\csc^2 t - 1\right) dt = -\cot t - t + C$$

$$= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C$$



Gambar 2

Latihan Soal

Hitunglah: $\int \frac{y^2}{\sqrt{2y - y^2}}\, dy$

3. Integran Yang Memuat Bentuk $\sqrt{x^2 - a^2}$

Apabila integran memuat bentuk ini maka substitusi yang digunakan adalah x = a sec t. Dengan substitusi ini maka

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2 t - 1)} = \sqrt{a^2 tg^2 t} = a\,tg\,t$$

Agar substitusi ini memiliki invers, daerah asal kita batasi, yakni

$$0 \le t \le \pi\,,\; t \ne \frac{\pi}{2}$$

Contoh

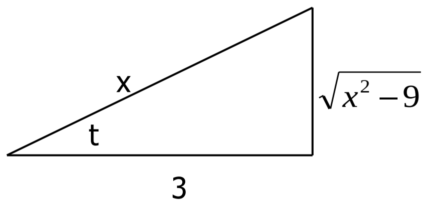
Hitunglah: $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\,dx$

Jawab : Andaikan $x = 3\sec t$ *maka* $dx = 3\sec t\, tg\, t$ *dan* $\sqrt{x^2 - 9} = 3tg\, t$

sehingga

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx = \int \frac{3tg\,t}{3\sec t}3\sec t\, tg\,t\,dt = 3\int tg^2 t\,dt = 3\int (\sec^2 t - 1)\,dt$$

$$= 3tg\,t - 3t + C = \sqrt{x^2-9} - 3arc\sec\left(\tfrac{x}{3}\right) + C$$



Latihan Soal

Hitunglah: $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}\,dx$

4. Integran Yang Memuat Bentuk $\sqrt{a^2 + x^2}$

Apabila integran memuat bentuk tersebut maka substitusi yang digunakan adalah x = a tg t. Dengan substitusi ini maka

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2(1+tg^2 t)} = \sqrt{a^2 \sec^2 t} = a\sec t \quad \textit{dan daerah asal dibatasi yaitu}$$

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

Contoh

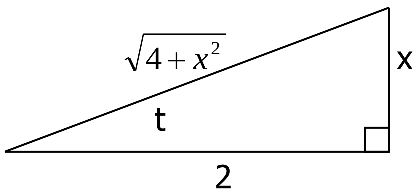
Hitunglah $\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$

Jawab : Andaikan $x = 2tg\, t$ *maka* $dx = 2\sec^2 t\; dt$ *dan* $\sqrt{4+x^2} = 2\sec t$

Sehingga

$$\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\, dx = \int \frac{2tg\, t}{2\sec t} 2\sec^2 t\; dt = 2\int \sec t\; tg\, t\; dt = 2\sec t + C$$

$$= \sqrt{4+x^2} + C$$



Gambar 3

Latihan Soal

Hitunglah: $\int \frac{dx}{x\sqrt{25+x^2}}$

Lebih luas dapat dikembangkan pada substitusi untuk integran yang memuat bentuk:

$$\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^n \;,\; \left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^n \;,\; dan \left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^n \text{ dengan n bilangan bulat}$$

$$Tentukan: \int \frac{(\sqrt{9x^2 - 16})^3}{x^6}\, dx$$

$Jawab:$

$$Substitusi: 3x = 4\sec t \rightarrow dx = \frac{4}{3}\sec t \tan t\, dt,\; \sqrt{9x^2 - 16} = 4\tan t$$

$$Sehingga: \int \frac{\sqrt{9x^2 - 16}}{x^6}\, dx = \frac{729}{4096}\int \frac{64\,\tan^3 t}{\sec^6 t}\left(\frac{4}{3}\sec t \tan t\right) dt = \frac{243}{256}\int \frac{\tan^4 t}{\sec^5 t}\, dt$$

$$= \frac{243}{256}\int \sin^4 t\, \cos t\, dt = \frac{243}{256}\int \sin^4 t\; d(\sin t)$$

$$= \frac{243}{1280}\sin^5 t + C$$

$$= \frac{243}{1280}\left(\frac{\sqrt{9x^2 - 16}}{3x}\right)^5 + C$$

$$= \frac{1}{1280x^3}(9x^2 - 16)^2\,\sqrt{9x^2 - 16} + C$$

Latihan Soal

Hitunglah: 1. $\int \frac{(\sqrt{9-x^2})^2}{x^3}\, dx$, 2. $\int \frac{(\sqrt{x^2-9})^2}{x}\, dx$, 3. $\int \frac{x}{(\sqrt{4+x^2})^3}\, dx$

5. Melengkapkan Menjadi Kuadrat

Apabila bentuk kuadrat $Ax^2 + Bx + C$ muncul dibawah akar dalam integran, kita dapat melengkapkan menjadi kuadrat sebelum menggunakan substitusi trigonometri.

Contoh

1. Tentukan $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+20}}$

   Jawab : $x^2 + 4x + 20 = x^2 + 4x + 4 + 16 = (x + 2)^2 + 16$

   Andaikan $u = x + 2$ diperoleh $du = dx$. Sehingga

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+20}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+16}}$$

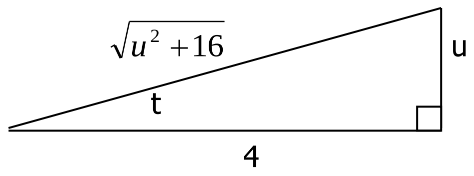
   Kemudian kita andaikan $u = 4tg\, t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ $maka\ du = 4\sec^2 t\, dt$

   $dan\ \sqrt{u^2+16} = 4\sec t$, $dengan\ demikian$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+16}} = \int \frac{4\sec^2 t\ dt}{4\sec t} = \int \sec t\ dt = \ln\left|\sec t + tgt\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{u^2+16}}{4} + \frac{u}{4}\right| + C = \ln\left|\sqrt{u^2+16} + u\right| - \ln 4 + C$$

$$= \ln\left|\sqrt{x^2+4x+20} + x + 2\right| + K$$



Gambar 4

Latihan Soal

Tentukan: $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+4x+20}}\, dx$

Kerjakan pada lembar jawaban yang tersedia!

D. Pengintegralan Parsial

Metode parsial didasarkan pada pengintegralan rumus turunan hasilkali dua fungsi. Apabila metode penggantian tidak berhasil, maka dengan metode parsial ini akan memberikan hasil sebagaimana yang diharapkan.

Andaikan u = f(x) dan v = g(x). Maka $D_x[f(x).g(x)]=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$

Dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan tersebut kita peroleh :

$$f(x)\,g(x) = \int f(x)\,g'(x)\,dx + \int g(x)\,f'(x)\,dx$$

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx$$

Karena du = f′(x) dx dan dv = g′(x) dx, maka dapat ditulis :

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Pengintegralan ini tergantung pada pemilihan u dan dv yang tepat.

Contoh

1. Tentukan $\int x \sin x \, dx$

Jawab :

Misalkan u = x dan dv = sin x dx, diperoleh du = dx dan v = -cos x.

Sehingga

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= -x\cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

2. Tentukan $\int \ln x \, dx$

Jawab :

Misalkan u = ln x dan dv = dx, diperoleh du = 1/x dx dan v = x, sehingga

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= x\ln x - \int dx \\ &= x\ln x - x + C\end{aligned}$$

Latihan Soal

Hitung:

1. $\int_1^2 \ln x \, dx$, 2. $\int x^2 \cos x \, dx$ 3. $\int e^x \cos x \, dx$, 4. $\int \sec^3 x \, dx$

E. Rumus Reduksi

Suatu rumus yang berbentuk

$\int f^n(x)\,dx = g(x) + \int f^k(x)\,dx,$ dengan k < n dinamakan *rumus reduksi*

Contoh

Jabarkan suatu rumus reduksi untuk $\int \sin^n x\,dx$

Jawab : Andaikan u = $\sin^{n-1}$ x dan dv = sin x dx, maka du = (n-1) $\sin^{n-2}$x cos x dx dan v = - cos x, sehingga

$$\int \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx$$
$$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx$$
$$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx$$

Akhirnya diperoleh : $\displaystyle\int \sin^n x\,dx = \frac{-\sin^{n-1} x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$

Latihan Soal

Jabarkan suatu rumus reduksi untuk $\int \cos^n x\,dx$, kemudian hitunglah masing-masing untuk: $\int \sin^3 x\,dx,\ \int \sin^5 x\,dx,\ \int \cos^6 x\,dx,\ \int \cos^7 x\,dx$

F. Pengintegralan Fungsi Rasional

Menurut definisi, fungsi rasional adalah hasil bagi dua fungsi sukum banyak (polinom). misalnya

$$f(x)=\frac{5}{(x-1)^3}\ ,\qquad g(x)=\frac{2x+1}{x^2-3x+2}\ ,\qquad h(x)=\frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x}$$

Untuk menyelesaikan pengintegralan fungsi rasional, kita dapat melakukan *penjabaran menjadi ppecahan parsial.* Dalam hal ini terdapat beberapa kemungkinan, yaitu : **faktor linier yang berbeda, faktor linier yang berulang, faktor linier dan faktor kuadrat, faktor kuadrat yang berulang.**

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh-contoh soal berikut.

Contoh

1. Tentukan $\int \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\,dx$

   Jawab : $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$. Kita dapat menuliskan

   $$\frac{2x+1}{x^2+3x+2}=\frac{2x+1}{(x+2)(x+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}$$

   Kita hilangkan pecahan-pecahan, maka

   $2x + 1 = A(x + 2) + B(x + 1) = (A + B)x + 2A + B$

   Kita substitusikan nilai $x = -2$ dan $x = -1$, diperoleh

   $A = -1$, dan $B = 3$. Sehingga

   $$\int\frac{2x+1}{x^2+3x+2}\,dx=\int\frac{-1}{x+2}\,dx+\int\frac{3}{x+1}\,dx=-\ln|x+2|+3\ln|x+1|+C$$

2. Tentukan $\int \frac{x}{x^2-2x+1}\,dx$

   Jawab : $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, ditulis $\frac{x}{x^2-2x+1}=\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}$

   Kita hilangkan pecahan-pecahan, maka $x = A(x - 1) + B$

   Kita substitusikan nilai $x = 1$, diperoleh $A = 1$, $B = 1$. Sehingga

   $$\int\frac{x}{x^2-2x+1}\,dx=\int\frac{1}{x-1}\,dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

   $$=\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$$

Latihan Soal

Tentukan: 1. $\int \frac{x+1}{x^3 - x^2 + x - 1}\, dx$ 2. $\int \frac{x^3 - 4x}{(x^2+1)^2}\, dx$

BAB 3
PENGGUNAAN INTEGRAL

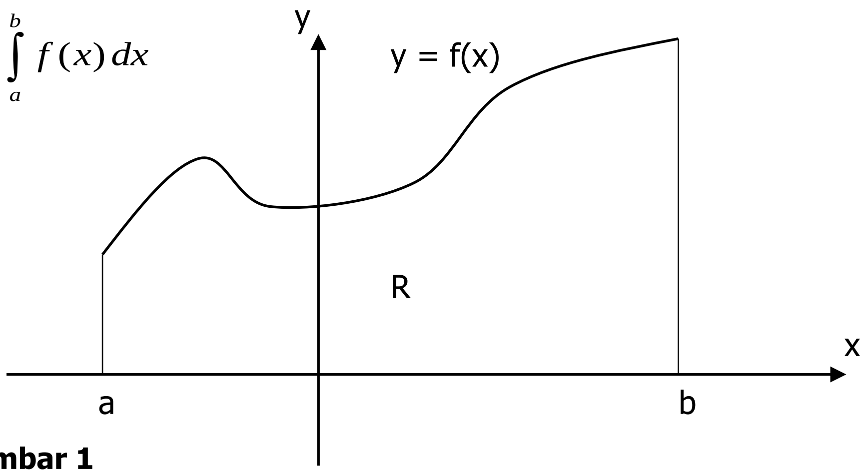
Pada bab ini dibahas mengenai penggunaan integral yang meliputi luas daerah bidang rata, volume benda putar, panjang kurva pada bidang, luas permukaan putar, kerja, gaya cairan, dan momen.

A. Luas Daerah Bidang Rata

Perhatikan daerah R yang dibatasi oleh grafik y = f(x), x = a, x = b, dan y = 0. Kita mengacu R sebagai daerah dibawah y = f(x) dan diatas sumbu x, antara x = a dan x = b. Perhatikan Gambar 1.

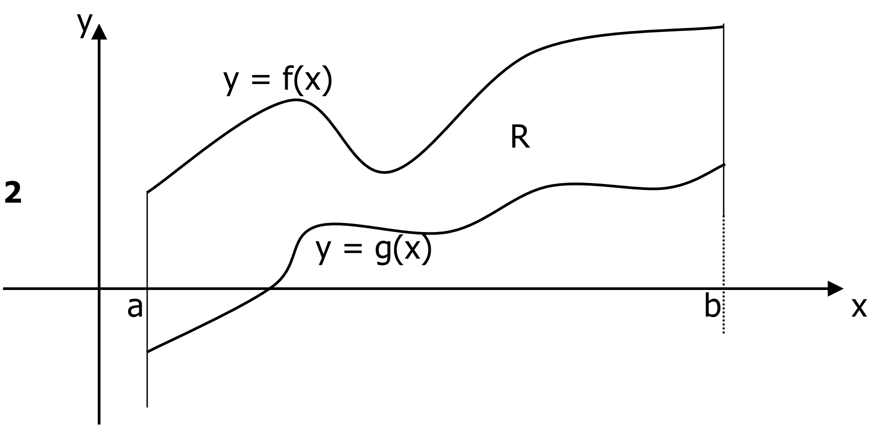
Luas daerah R dapat dihampiri oleh luas siku empat - siku empat seperti pada proses penentuan jumlah Riemann, sebagaimana telah diuraikan pada Bab I bagian B. Jadi luas daerah R ditentukan oleh

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$



Gambar 1

Selanjutnya kita tinjau daerah R yang dibatasi oleh grafik fungsi y = f(x) dan y = g(x), x = a, x = b dan f(x) > g(x) pada selang [a, b]. Perhatikan Gambar 2.



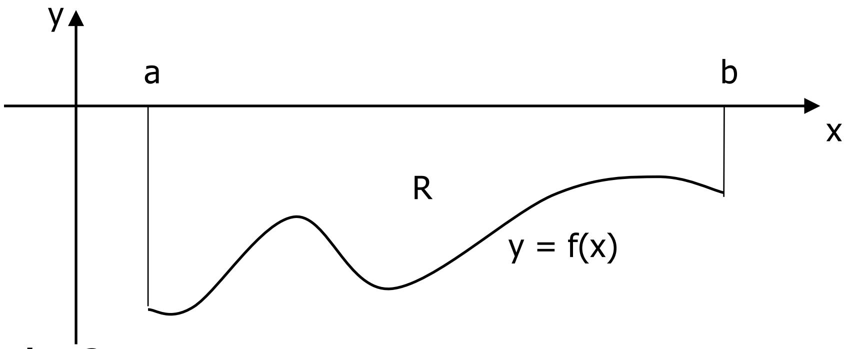
Gambar 2

Luas daerah R adalah

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x\,dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x) \big)\,dx$$

Apabila f kontinu dan negatif pada [a, b], maka luas daerah R yang dibatasi oleh grafik y = f(x), x = a, x = b, dan sumbu x (lihat Gambar 3), dapat dipandang sebagai luas daerah R yang dibatasi oleh grafik y = 0, y = f(x), dan garis – garis x = a, x = b. Jadi luas daerah R tersebut ditentukan oleh

$$A = \int_a^b 0\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$



Gambar 3

Contoh

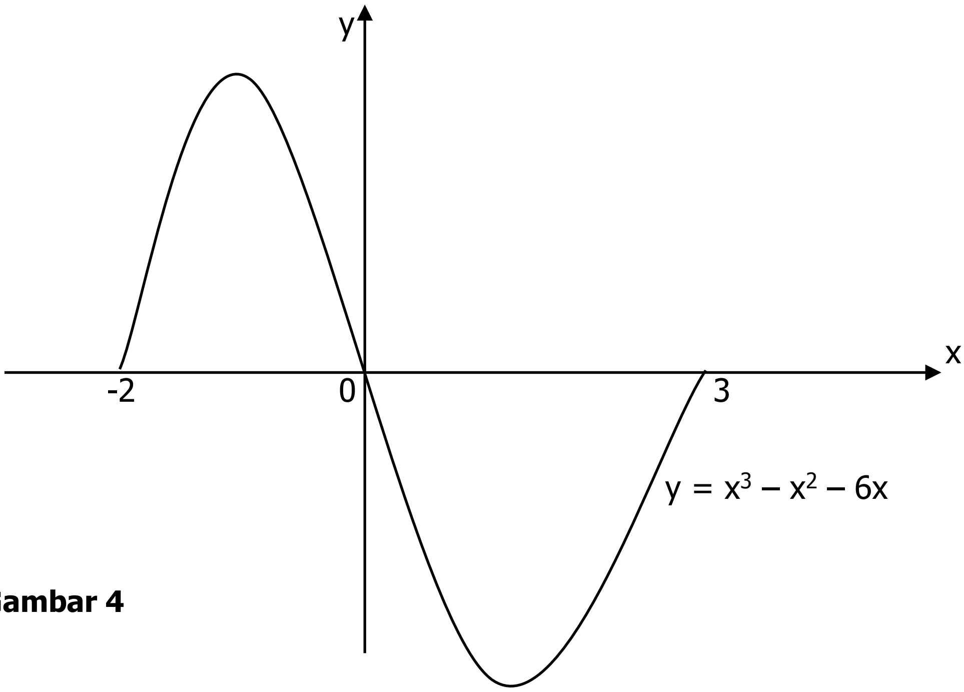
1. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh grafik $y = x^3 - x^2 - 6x$ dan sumbu x.

   Jawab : Grafik $y = x^3 - x^2 - 6x$ memotong sumbu x pada titik – titik (-2, 0), (0, 0) dan (3, 0). Pada selang [-2, 0] , f(x) > 0 dan pada selang [0, 3], f(x) < 0 lihat Gambar 4. Jadi luas daerah yang ditanyakan adalah

$$A = \int_{-2}^{0} (x^3 - x^2 - 6x)\,dx - \int_{0}^{3} (x^3 - x^2 - 6x)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 \Big|_{-2}^{0} - (\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{3}x^3 - 3x^2)\Big|_{0}^{3}$$

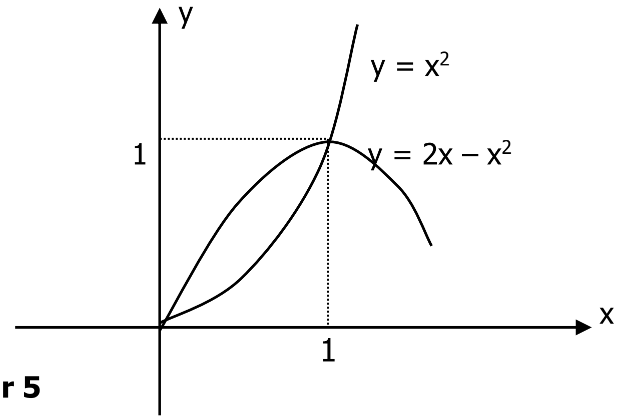
$$= \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12} \approx 21{,}08$$



Gambar 4

2. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 2x - x^2$

Jawab : Grafik fungsi $y = x^2$ dan $y = 2x - x^2$ berpotongan di titik (0, 0) dan titik (1, 1) seperti terlihat pada Gambar 5 berikut ini.



Gambar 5

Luas daerah yang ditanyakan adalah

$$A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2)\,dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx = x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Luas daerah yang ditanyakan adalah

$$A = \int_{-2}^{1} (3 - y^2 - y - 1)\,dy = \int_{-2}^{1} (-y^2 - y + 2)\,dy$$

$$= -\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 2y \Big|_{-2}^{1} = 4{,}5$$

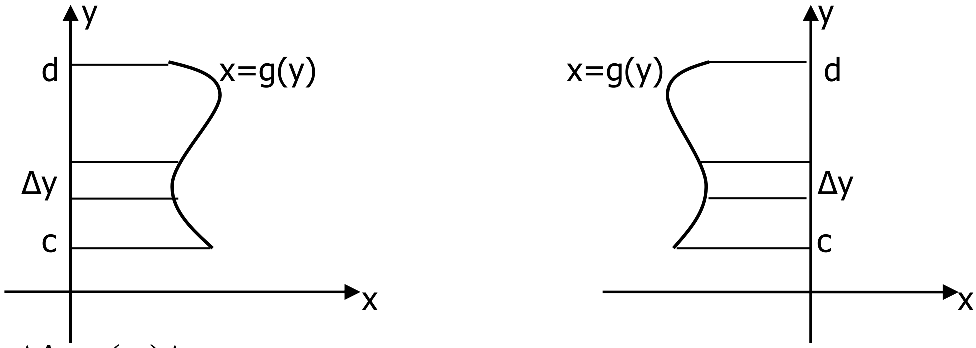
Latihan Soal

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh :

1. $y = x^2 - 2x - 3,\ y = 0,\ antara\ x = 0\ dan\ x = 2$
2. $y = x^2\ ,\ y = x + 2$
3. $y = x^2 - 2,\ y = 2x^2 + x - 4$

Berikut ini diberikan beberapa rumus tambahan beserta grafiknya untuk perhitungan luas daerah bidang rata :

1. Daerah dibatasi oleh x = g(y), y = c, y = d dan x = 0



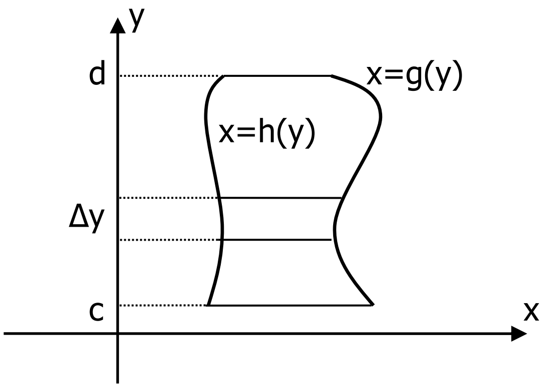
$$\Delta A \approx g(y_i)\,\Delta y_i$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} g(y_i)\,\Delta y_i$$

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(y_i)\,\Delta y_i = \int_c^d g(y)\,dy \qquad\qquad A = -\int_c^d g(y)\,dy$$

Gambar 6

Daerah dibatasi oleh x=g(y), x=h(y), y=c, dan y=d



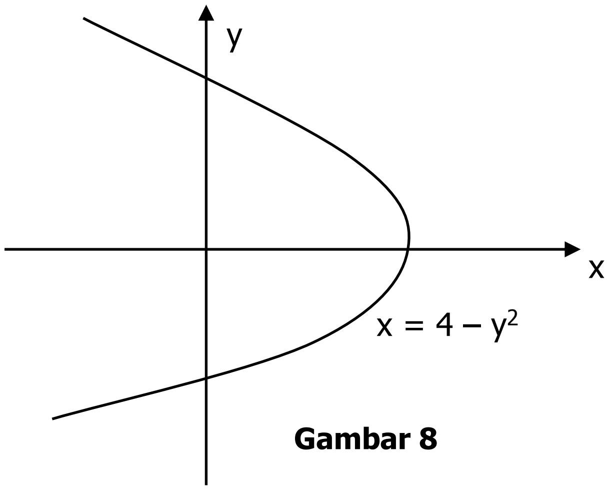
$$A = \int_c^d \big(g(y) - h(y)\big)dy$$

Gambar 7

Contoh

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh parabola x = 3 – y^2 dan garis x = 0

Jawab : Grafik fungsi x = 4 – y^2 dan x = 0 berpotongan di titik – titik (0, 2) dan (0, -2) seperti terlihat pada Gambar 6.



Gambar 8

Luas daerah yang ditanyakan adalah

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - y^2)\, dy$$

$$= 4y - \frac{1}{3}y^3 \Big|_{-2}^{2} = \left(8 - \tfrac{8}{3}\right) - \left(-8 + \tfrac{8}{3}\right) = 16 - \tfrac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

Latihan Soal

1. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh parabola $x = y^2 - 9$ dan garis $x = 0$
2. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh parabola $x = 3 - y^2$ dan garis $x - y = 1$

Untuk menentukan luas daerah bidang rata, terdapat cara berfikir yang dapat membantu. Cara ini ditempuh melalui prosedur berikut :

Langkah 1 Menggambar daerah yang bersangkutan.

Langkah 2 Membuat potongan jalur-jalur dan memberi nomor (memilih) jalur tertentu.

Langkah 3 Hampiri luas jalur tertentu tersebut dengan luas persegi panjang.

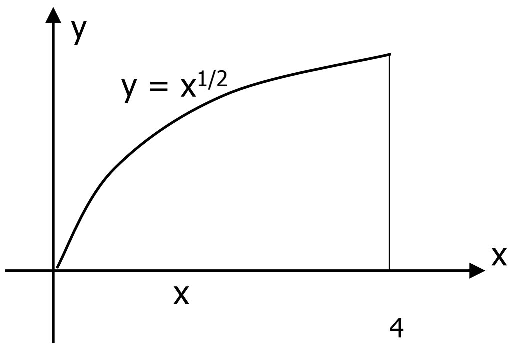
Langkah 4 Menjumlahkan luas hampiran tersebut.

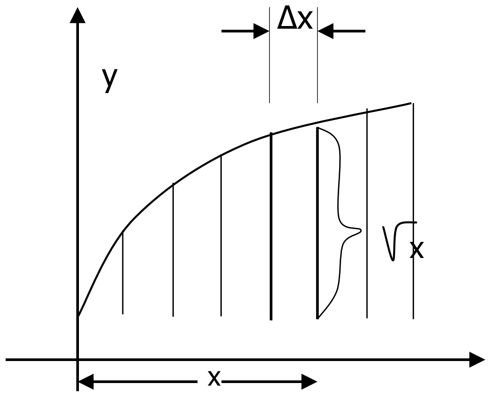
Langkah 5 Mengambil limit dari jumlah luas hampiran tersebut .

Untuk menjelaskan prosedur tersebut diatas perhatikan contoh sederhana berikut ini.

Contoh Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, garis x = 0 dan x = 4.

Jawab : Langkah 1 Langkah 2





Gambar 9

Langkah 3 $\Delta A \approx \sqrt{x}\ .\ \Delta x$

Langkah 4 $A \approx \sum \sqrt{x}\ .\ \Delta x$

Langkah 5 $A = \int_0^4 \sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{16}{3}$

Jadi luas daerah yang ditanyakan adalah A = $\frac{16}{3} \approx 5{,}3$

Setelah kita memahami prosedur tersebut, maka kita dapat menyingkat langkah-langkah tersebut menjadi tiga langkah saja, yaitu : **potong, hampiri, integralkan.**

B. Volume Benda Putar

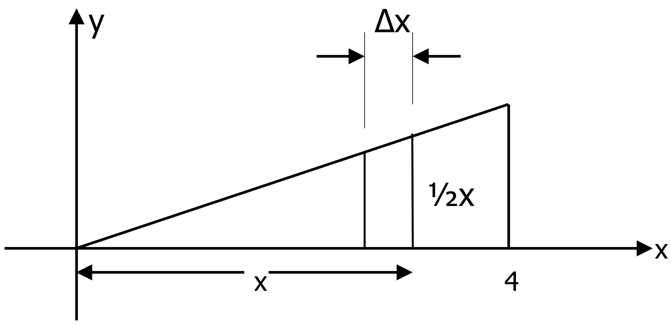
Apabila sebuah daerah rata, yang terletak seluruhnya pada satu bagian bidang yang terbagi oleh sebuah garis lurus tetap, diputar mengelilingi garis tersebut, maka daerah itu akan membentuk sebuah **benda putar**. Garis yang tetap tersebut dinamakan **sumbu putar**.

Sebagai contoh, apabila sebuah daerah segitiga siku-siku diputar dengan sumbu putar salah satu sisi siku-sikunya, maka akan membentuk sebuah kerucut ; apabila sebuah daerah setengah lingkaran diputar dengan sumbu putar garis tengahnya, maka terbentuk sebuah bola.

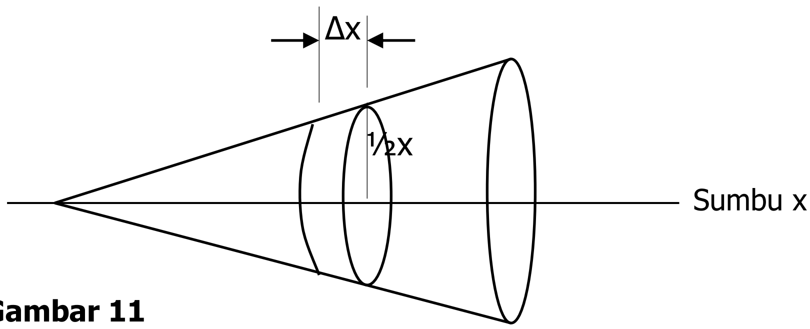
Untuk perhitungan volume – volume benda putar ini, sebaiknya kita pahami prosedur *potong, hampiri, integralkan,* sebagaimana pada perhitungan luas. Metode yang digunakan untuk menghitung volume benda putar ini adalah **metode cakram, metode cincin, dan metode kulit tabung**. Namun demikian dalam menggunakan metode tersebut, kita lihat terlebih dahulu keadaan benda putar yang terjadi. Untuk lebih jelasnya perhatikan beberapa contoh berikut.

Contoh 1 Hitung volume benda putar yang terbentuk, apabila daerah yang dibatasi oleh garis y = ½ x, garis x = 4, dan garis y = 0 diputar dengan sumbu putar sumbu x.

Jawab :



Gambar 10



Gambar 11

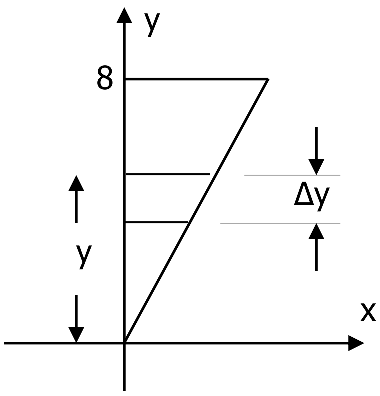
Pada Gambar 1 kita lihat daerah dengan sebuah jalur pemotongan. Apabila daerah tersebut diputar dengan sumbu putar sumbu x, daerah ini membentuk sebuah kerucut dan jalur tersebut membentuk sebuah cakram yang volumenya ΔV dapat dihampiri dengan volume sebuah tabung dengan tinggi Δx dan jari-jari alas ½x. Volume tabung ini adalah

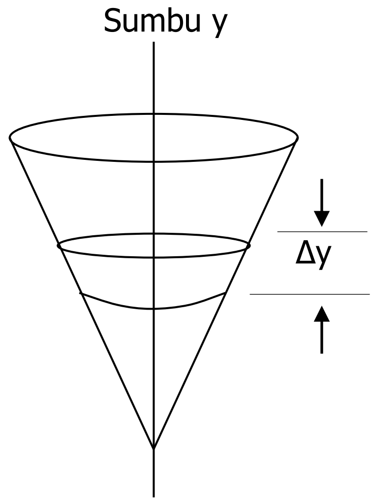
$$\Delta V \approx \pi \left(\tfrac{1}{2}x\right)^2 \Delta x$$

Apabila volume ini kita jumlahkan kemudian diambil limitnya, maka diperoleh volume kerucut, yaitu $V = \pi \int_0^4 \tfrac{1}{4} x^2 \, dx = \tfrac{1}{12} x^3 \Big|_0^4 = \dfrac{16}{3}\pi \approx 16{,}75$

Contoh 2 Sebuah daerah yang dibatasi oleh kurva y = 2x , garis y = 8, dan garis x = 0 diputar dengan sumbu putar sumbu y. Hitunglah volume benda putar yang terjadi.

Jawab :





Gambar 12

$\Delta V \approx \pi (\tfrac{1}{2} y)^2 \, \Delta y$

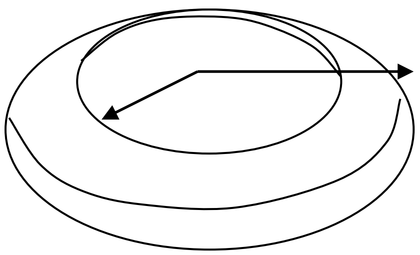
Volume benda putar yang terbentuk (kerucut) adalah

$$V = \pi \int_0^8 \tfrac{1}{4} y^2 \, dy = \pi \frac{1}{12} y^3 \Big|_0^8 = \frac{512}{12}\pi = \frac{128}{3}\pi \approx 133{,}97$$

Latihan Soal

Hitunglah volume bola yang terbentuk, apabila daerah setengah lingkaran yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{4 - x^2}$ dan garis y = 0 diputar dengan sumbu putar sumbu x.

Pada contoh 1 dan contoh 2, merupakan penerapan metode cakram. Namun adakalanya apabila sebuah benda putar kita potong-potong tegak lurus sumbu putarnya, kita memperoleh sebuah cakram yang di tengah-tengahnya ada lubangnya. Daerah yang demikian ini disebut **cincin**.



Gambar 13

$$V = \pi({r_2}^2 - {r_1}^2)t$$

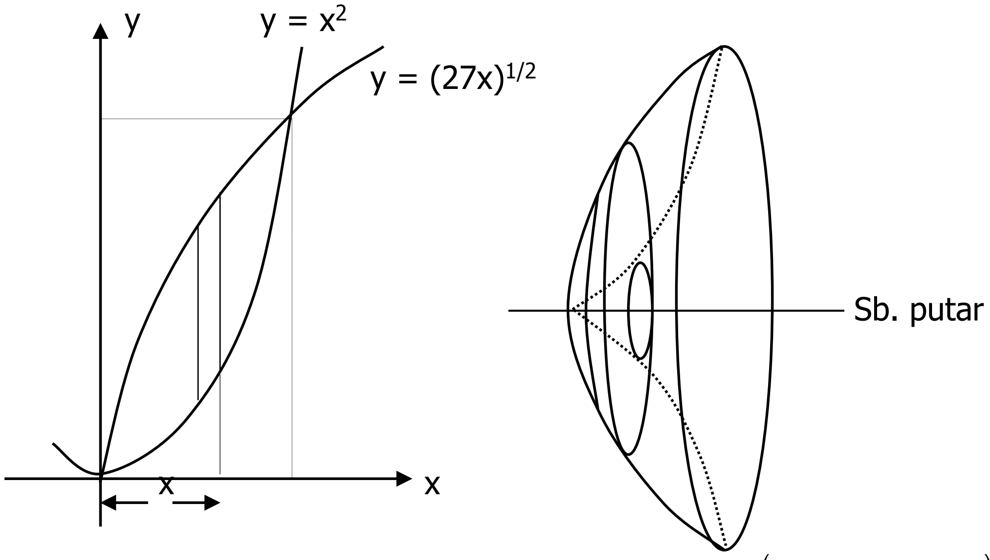
r_1 = jari-jari dalam

r_2 = jari-jari luar

t = tinggi cincin

Contoh Hitung volume benda putar yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh parabola $y = x^2 \ dan \ y = \sqrt{27x}$ diputar dengan sumbu putar sumbu x.

Jawab :



$$\nabla V \approx \pi\left((\sqrt{27x})^2 - (x^2)^2\right)\nabla x$$

Gambar 14

Jadi volume benda yang terbentuk adalah

$$V = \pi\int_0^3 \left(27x - x^4\right)dx$$

$$= \pi\left(\tfrac{27}{2}x^2 - \tfrac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^3 = \pi(\tfrac{243}{2} - \tfrac{243}{5}) = 72{,}9\pi \approx 228{,}906$$

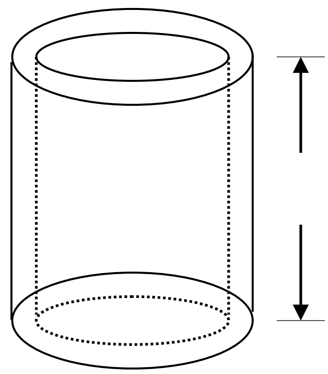
Latihan Soal

1. Hitung volume benda putar yang terbentuk apabila daerah setengah lingkaran yang dibatasi oleh kurva $x = \sqrt{9 - y^2}$ dan sumbu y diputar dengan sumbu putar garis x = -1.
2. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh $y = 4 - x^2$ ($x \geq 0$), x = 0, y = 0 diputar dengan sumbu putar garis x=2.

Selanjutnya kita bahas metode **Kulit Tabung**. Dalam berbagai persoalan, metode ini lebih mudah digunakan jika dibanding metode cakram dan metode cincin.

Kulit tabung adalah sebuah benda yang dibatasi oleh dua tabung lingkaran tegak yang sumbu simetrinya berimpit (Gambar 7). Apabila jari-jari tabung dalam adalah r_1, dan jari-jari tabung luar adalah r_2, sedangkan tinggi tabung adalah t, maka volume kulit tabung adalah

$$\begin{aligned} V &= (luas\ \ alas).(tinggi) \\ &= (\pi r_2^{\ 2} - \pi r_1^{\ 2})\,t \\ &= \pi (r_2^{\ 2} - r_1^{\ 2})\,t \\ &= \pi (r_2 + r_1)(r_2 - r_1)\,t \\ &= 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} t\,(r_2 - r_1) \end{aligned}$$



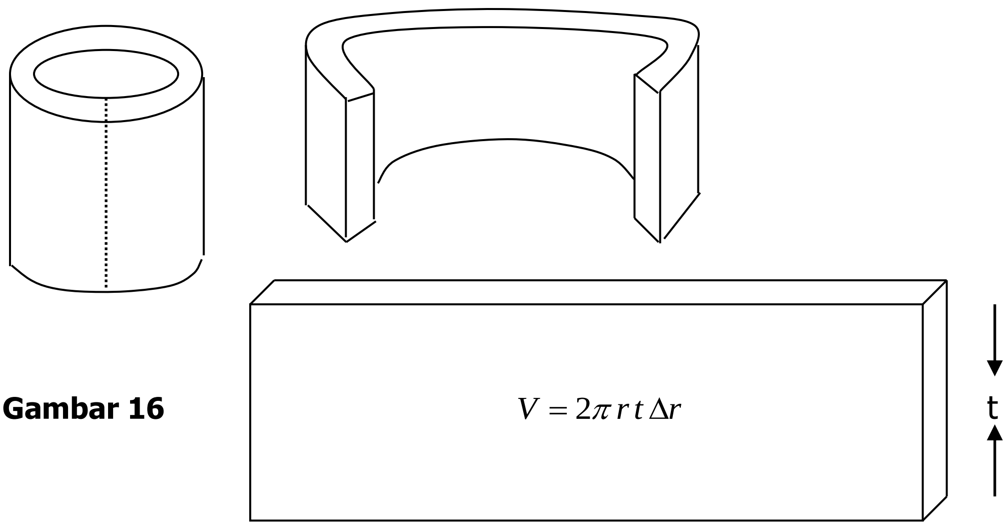
Sehingga dapat dinyatakan $V = 2\pi\, r\, t\, \Delta r$

Gambar 15

Atau : *Volume* = 2π x (*jari-jari rata-rata*) x (*tinggi*) x (*tebal*)

Cara mudah untuk mengingat rumus tersebut adalah sebagai berikut :

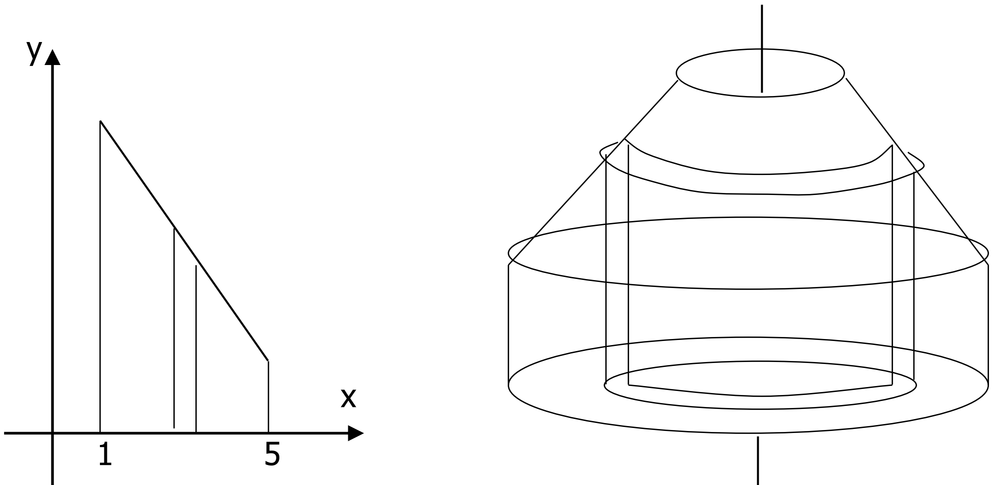
Jika kulit tabung sangat tipis terbuat dari kertas, kita dapat memotongnya sepanjang garis sejajar sumbu simetri kemudian membukanya, maka akan kita peroleh selembar siku empat yang memiliki ketebalan. Volume benda ini yang berbentuk lempeng dapat kita hitung (Gambar 8).



Gambar 16

Contoh

Tentukan volume benda putar yang terjadi apabila daerah yang dibatasi oleh garis 3x + 2y = 18 , garis x = 1, dan x = 5 diputar dengan sumbu putar sumbu y.



Gambar 17

Dengan memperhatikan Gambar 9 kita peroleh

$$\Delta V \approx 2\pi\, x(9 - \tfrac{3}{2}x)\,\Delta x$$

Sehingga

$$V = 2\pi \int_1^5 \left(9x - \tfrac{3}{2}x^2\right)dx = 2\pi \left(\tfrac{9}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^3\right)\Big|_1^5 = 2\pi\left[\left(\tfrac{225}{2} - \tfrac{125}{2}\right) - 4\right] = 92\pi \approx 288{,}9$$

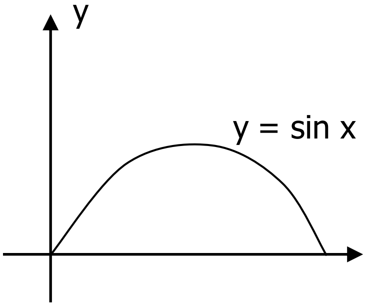
Latihan Soal

1. Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh garis $y = \frac{1}{2}x$, garis x = 4 dan sumbu x, diputar dengan sumbu putar sumbu x dengan menggunakan metode cakram dan metode kulit tabung.
2. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva y = 3 + 2x – x^2, sumbu x, dan sumbu y diputar dengan sumbu putar : (a) sumbu x, (b) sumbu y, (c) garis y = -1, dan garis x = 4

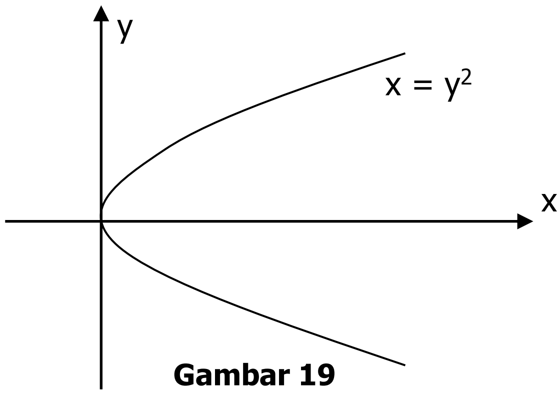
C. Panjang Kurva pada Bidang (Kurva Rata)

Sebelum membahas panjang kurva , kita perlu tahu pengertian kurva terlebih dahulu. Untuk itu, kita perhatikan uraian singkat berikut ini.

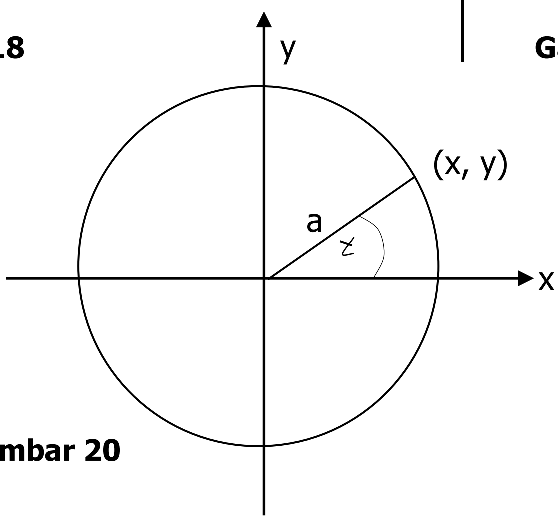
Grafik dari fungsi y = sin x, $0 \le x \le \pi$, adalah sebuah kurva rata (gambar 1). Begitu pula grafik dari fungsi x = y^2 , $-2 \le y \le 2$ (gambar 2). Dari trigonometri kita tahu bahwa $x = a\cos t, y = a\sin t, 0 \le t \le 2\pi,$ merupakan lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$ (gambar 3). Dalam persamaan ini t sebagai perubah sebarang, yang selanjutnya disebut **parameter**.



Gambar 18



Gambar 19



Gambar 20

Kita dapat menyajikan kurva sinus dan parabola kedalam bentuk persamaan parameter.

Persamaan y = sin x maupun x = y^2 tersebut diatas masing-masing dapat kita nyatakan dalam bentuk persamaan parameter sebagai berikut :

$$y = \sin x, \quad x = x, \quad 0 \le x \le \pi \quad dan \quad y = y, \quad x = y^2, \quad -2 \le y \le 2$$

Dalam persamaan yang pertama, parameternya adalah x ; sedang persamaan kedua parameternya adalah y.

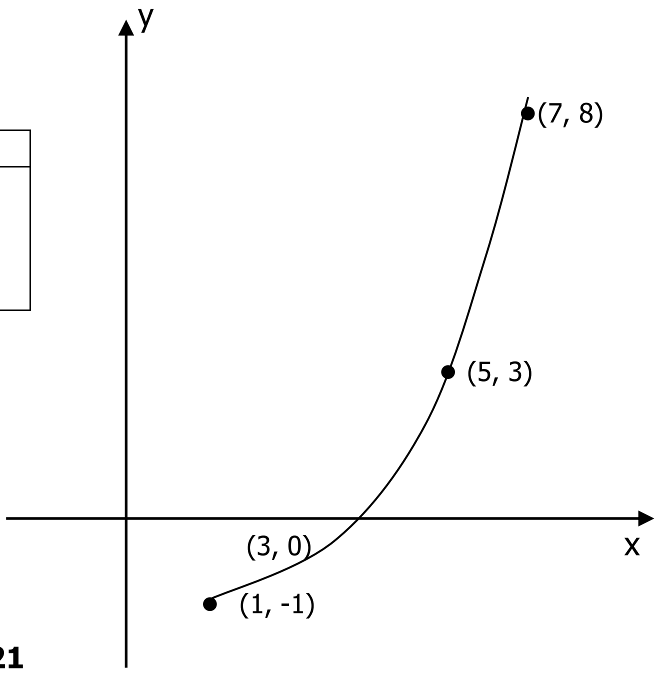
Jadi sebuah *kurva rata* dapat dinyatakan dalam sepasang persamaan parameter $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, kita andaikan fungsi f dan g kontinu pada selang tersebut. Anggaplah t menyatakan waktu. Apabila t bertambah dari a hinga b, maka titik (x, y) bergerak sepanjang kurva.

Contoh

1. Gambarlah sebuah kurva yang memiliki persamaan parameter $x = 2t + 1$, $y = t^2 - 1$, $0 \le t \le 3$.

Jawab :

t	x	y
0	1	-1
1	3	0
2	5	3
3	7	8



Gambar 21

Definisi

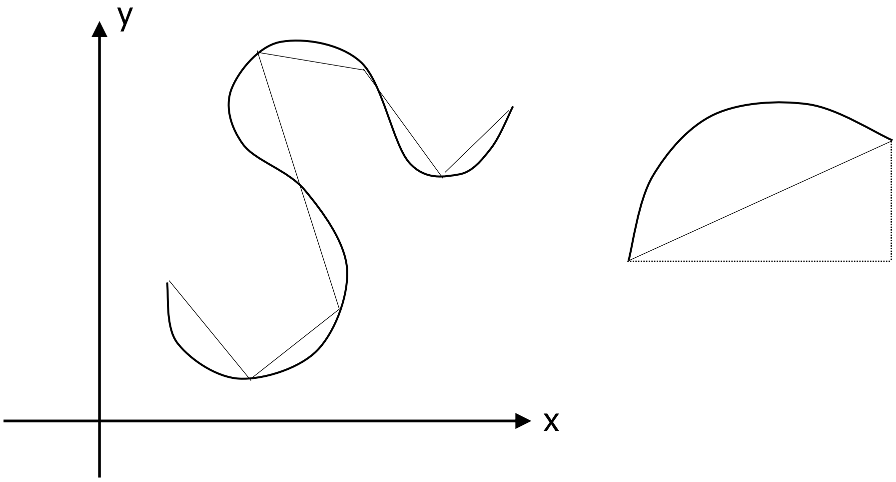
Sebuah kurva rata disebut mulus apabila kurva tersebut ditentukan oleh persamaan–persamaan $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, dengan ketentuan bahwa f' dan g' adalah kontinu pada $a \le t \le b$, sedangkan $f'(t)$ dan $g'(t)$ tidak bersama-sama nol di selang $a < t < b$.

Akhirnya sampai pada pertanyaan utama, apakah yang dimaksud dengan panjang kurva mulus dengan persamaan $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$.

Untuk menjawab pertanyaan itu, kita lakukan langkah – langkah berikut :

Kita buat suatu partisi pada selang [a, b] menjadi n selang bagian dengan titk-titik : $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$

Pembagian ini mengakibatkan kurva terbagi oleh titik-titik $Q_0, Q_1, Q_2, \dots Q_n$, seperti terlihat pada Gambar 5.



Gambar 22

Kemudian kita hampiri kurva itu dengan segi banyak, kita hitung panjangnya kemudian ditarik limitnya apabila norma partisi menuju nol. Khususnya kita hampiri "panjang" ΔS_i tertentu pada kurva (Gambar 5) oleh

$$\begin{aligned}\Delta w_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sqrt{\left(f(t_i) - f(t_{i-1})\right)^2 + \left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right)^2}\end{aligned}$$

Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata Untuk Turunan, kita mengetahui adanya titik-titik $\overline{t_i}$ *dan* $\overline{\overline{t_i}}$ dalam selang (t_{i-1}, t_i), sehingga

$$\begin{aligned}f(t_i) - f(t_{i-1}) &= f'(\overline{t_i})\,\Delta t_i \\ g(t_i) - g(t_{i-1}) &= g'(\overline{\overline{t_i}})\,\Delta t_i\end{aligned}$$

dengan $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, maka

$$\Delta w_i = \sqrt{\left(f'(\overline{t_i})\,\Delta t_i\right)^2 + \left(g'(\overline{\overline{t_i}})\,\Delta t_i\right)^2} = \sqrt{\left(f'(\overline{t_i})\right)^2 + \left(g'(\overline{\overline{t_i}})\right)^2}\;\Delta t_i$$

dan panjang segi banyak adalah

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta w_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(f'(\overline{t_i})\right)^2 + \left(g'(\overline{\overline{t_i}})\right)^2}\;\Delta t_i$$

Selanjutnya kita dapat mendefinisikan panjang kurva sebagai limit dari bentuk diatas, jadi

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + \left(g'(t)\right)^2}\ dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$$

Apabila persamaan kurva adalah y = f(x), a ≤ x ≤ b, maka panjang kurva adalah

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

Dan apabila persamaan kurva adalah x = g(y), c ≤ y ≤ d, maka panjang kurva adalah

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

Contoh

Tentukan keliling lingkaran dengan pusat O (0, 0) dengan jari-jari 3.

Jawab :

Persamaan lingkaran ini adalah $x^2 + y^2 = 9$, dan persamaan dalam bentuk parameter adalah $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t, 0 \le t \le 2\pi$. Sehingga dx/dt = -3 sin t, dan dy/dt = 3 cos t. Jadi

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t}\ dt = \int_0^{2\pi} 3\,dt = 3t \Big|_0^{2\pi} = 6\pi \approx 18{,}84$$

Latihan Soal

1. Hitunglah panjang ruas garis yang menghubungkan titik A(0, 3) dan B(6, 11)
2. Hitunglah panjang kurva $y = x^2$ dari (0, 0) sampai dengan (2, 4).

Diferensial Panjang Busur:

Andaikan f sebuah fungsi yang dapat didiferensialkan pada [a, b]. Untuk tiap x pada (a, b) didefinisikan s(x) melalui

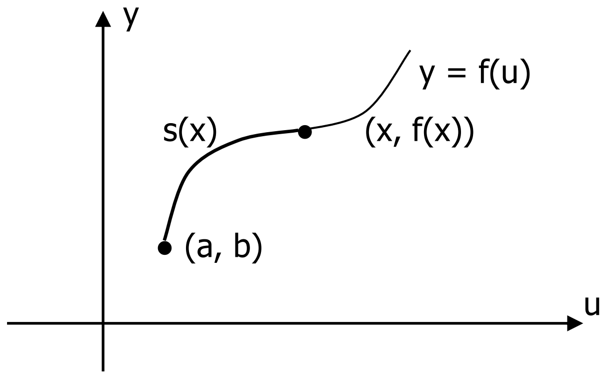
$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \left(f'(u) \right)^2} \; du$$

Maka s(x) adalah panjang busur kurva y = f(u) antara titik (a, f(a)) dan titik (x, f(x)), lihat Gambar 7. Berdasarkan teorema tentang pendiferensialan sebuah integral menurut batas atasnya, kita peroleh :

$$s'(x) = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(f'(x) \right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$$

Sehingga diferensial panjang busur ds dapat kita tulis sebagai :

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \; dx$$



Gambar 23

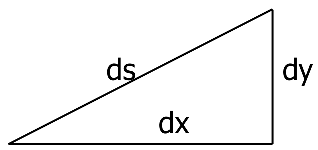
Kita dapat memperoleh tiga bentuk untuk ds, tergantung pada grafik persamaan parameter kurva yang bersangkutan, yakni

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Juga dapat dinyatakan (lihat gambar 8)

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad \text{..........*)}$$

Ketiga bentuk rumus diatas diperoleh dari persamaan .. *) dengan membagi dan kemudian mengalikan ruas kanan dengan $(dx)^2$, $(dy)^2$ dan $(dt)^2$. Misalnya

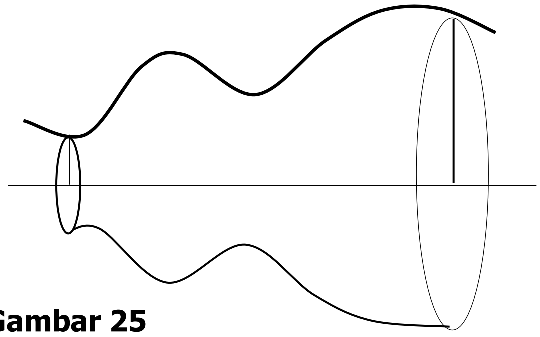


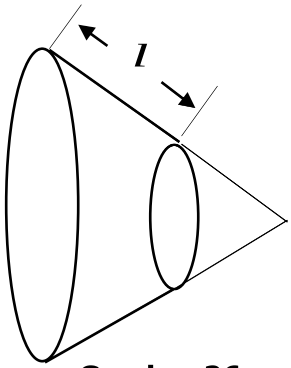
Gambar 24

$$(ds)^2 = \left(\frac{(dx)^2}{(dx)^2}+\frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right)(dx)^2 = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right](dx)^2$$

D. Luas Permukaan Putar

Apabila sebuah kurva yang terletak pada sebuah bidang diputar mengelilingi sebuah garis pada bidang itu, maka kurva tersebut membentuk suatu **permukaan puta**r (Gambar 1). Tujuan kita adalah menentukan luas permukaan putar.


Gambar 25



Gambar 26

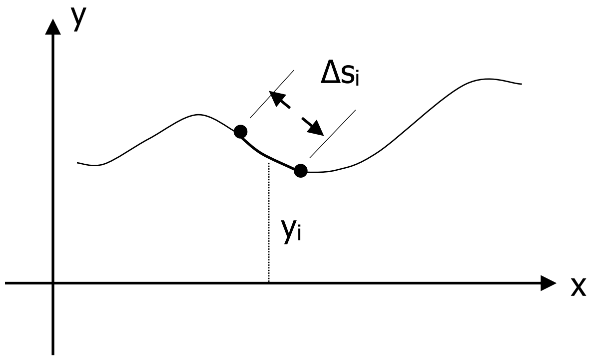
Kita mulai mencari rumus untuk luas permukaan *kerucut terpancung.* Sebuah kerucut terpancung adalah bagian permukaan kerucut yang terletak antara dua bidang yang tegak lurus pada sumbu kerucut (Gambar 2). Apabila jari-jari lingkaran alas adalah r_1 dan jari-jari lingkaran atas adalah r_2 sedangkan panjang rusuk kerucut terpancung adalah l, maka luas selimut kerucut terpancung adalah

$$A = 2\pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) l = 2\pi\, x\, (\, jari - jari\ \ rata - rata)\, x\, rusuk$$

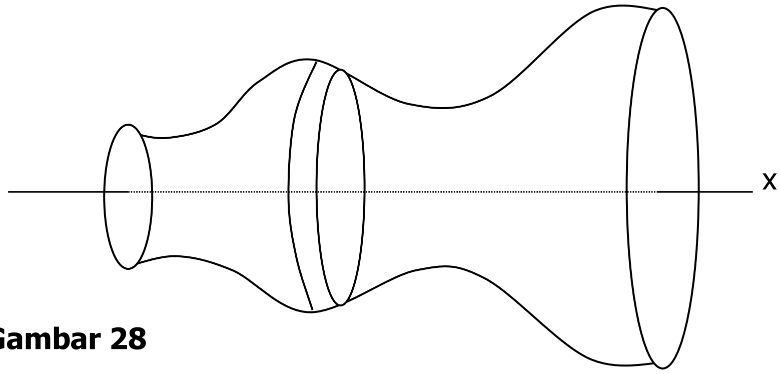
Pemutaran Mengelilingi Sumbu X Andaikan x = f(t), y = g(t), t pada selang [a, b], adalah persamaan kurva licin pada kuadran pertama seperti tampak pada Gambar 3. Kita buat sebuah partisi dari selang [a, b], dengan membaginya menjadi n selang bagian oleh titik-titik $a = t_0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n = b$. Dengan demikian kurva juga terbagi atas n bagian. Andaikan Δs_i adalah panjang kurva bagian ke-i dan andaikan y_i adalah ordinat sebuah titik pada bagian ini. Apabila kurva ini diputar mengelilingi sumbu x, ia akan membentuk suatu permukaan dan bagian Δs_i akan membentuk permukaan bagian padanya (lihat Gambar 4). Luas dari bagian ini dapat dihampiri oleh luas kerucut terpancung, yaitu $2\pi\, y_i\, \Delta s_i$.

Apabila luas-luas ini kita jumlahkan dan kemudian menarik limitnya dengan membuat norma partisi menuju nol, kita akan memperoleh hasil yang didefinisikan sebagai luas permukaan putar, yakni

$$A = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\, y_i\, \Delta s_i = \int_{*}^{**} 2\pi\, y\, ds$$



Gambar 27



Gambar 28

Jadi, apabila permukaan itu terbentuk oleh sebuah kurva y = f(x), a ≤ x ≤ b, yang diputar mengelilingi sumbu x, maka luas permukaan putar tersebut adalah :

$$A = 2\pi \int_{*}^{**} y\, ds = 2\pi \int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx$$

Contoh

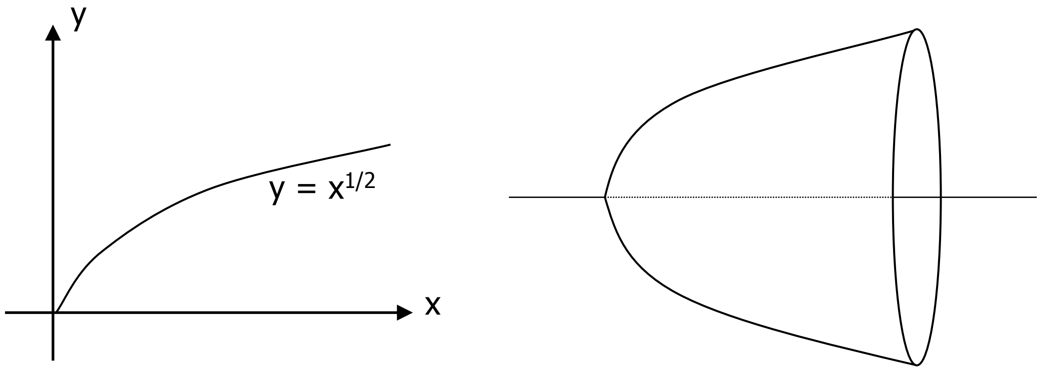
Tentukan luas permukaan putar apabila kurva $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$, diputar mengelilingi sumbu x (Gambar 5).

Jawab : $f(x) = \sqrt{x}$ *kita peroleh* $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$.

$$A = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\ dx = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\ dx$$

$$= \pi \int_0^4 \sqrt{4x+1}\ dx = \left[\frac{1}{4}\pi . \frac{2}{3}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^4$$

$$= \frac{1}{6}\pi (17^{\frac{3}{2}} - 1) \approx 36{,}18$$



Gambar 29

Apabila persamaan kurva dalam bentuk parameter x = f(t), y = g(t), a ≤ t ≤ b, maka rumus luas permukaan putar adalah

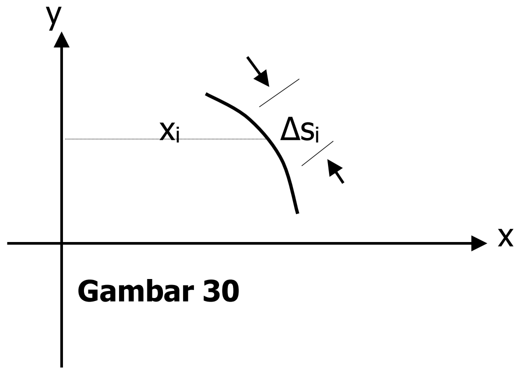
$$A = 2\pi \int_{*}^{**} y\, ds = 2\pi \int_{a}^{b} g(t) \sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + \left(g'(t)\right)^2}\; dt$$

Latihan Soal

1. Tentukan luas permukaan yang terbentuk apabila kurva y = 6x, 0 ≤ x ≤ 1 ; diputar mengelilingi sumbu x. Kemudian gunakan rumus luas kulit kerucut (sisi tegak), yakni A = π r s akan diperoleh hasil yang sama.
2. Tentukan luas permukaan yang terbentuk apabila kurva $y = \sqrt{25 - x^2}$; diputar mengelilingi sumbu x. Kemudian gunakan rumus luas permukaan bola yang kita pelajari di sekolah lanjutan, yakni A = 4 π r^2 , akan kita dapatkan hasil yang sama.

Pemutaran Mengelilingi Sumbu Y Sebagaimana langkah pada pemutaran mengeliliingi sumbu x, maka dengan bantuan Gambar 30 kita peroleh

$$A = \int_{*}^{**} 2\pi\, x\, ds$$



Gambar 30

Jadi, apabila permukaan itu terbentuk oleh sebuah kurva x = g(y), c ≤ y ≤ d, yang diputar mengelilingi sumbu y, maka luas permukaan putar tersebut adalah :

$$A = 2\pi \int_{*}^{**} x\, ds = 2\pi \int_{c}^{d} g(y)\, \sqrt{1 + \left(g'(y)\right)^2}\;\, dy$$

Apabila persamaan kurva dalam bentuk parameter x = f(t), y = g(t), a ≤ t ≤ b, maka rumus luas permukaan putar adalah

$$A = 2\pi \int_{*}^{**} x\, ds = 2\pi \int_{a}^{b} f(t)\, \sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + \left(g'(t)\right)^2}\;\, dt$$

Contoh

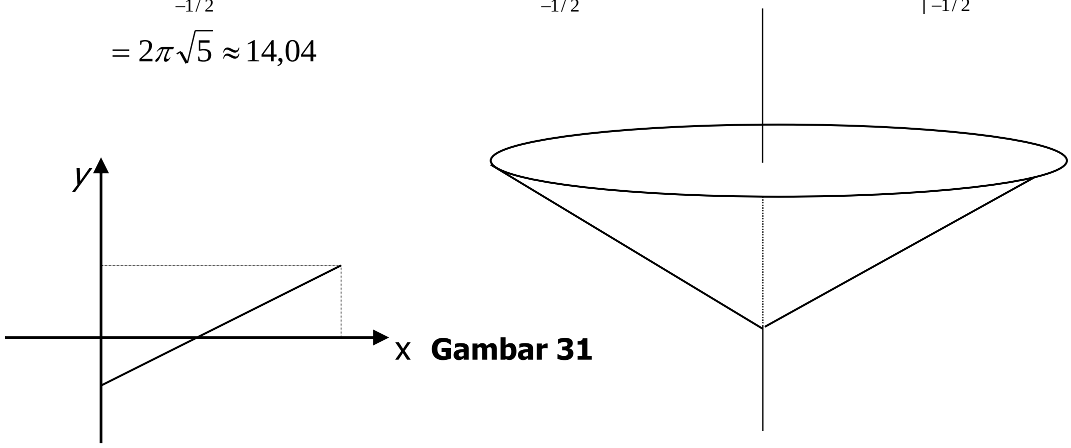
1. Tentukan luas permukaan yang terbentuk apabila kurva x = 2y + 1, 0 ≤ x ≤ 2, diputar mengelilingi sumbu y.

   Jawab :

   Dari x = g(y) = 2y +1 kita peroleh g′(y) = 2, jadi

   $$A = 2\pi \int_{-1/2}^{1/2} (2y+1)\sqrt{1+4}\; dy = 2\pi\sqrt{5} \int_{-1/2}^{1/2} (2y+1)\, dy = 2\pi\sqrt{5}\left(y^2 + y\right)\Big|_{-1/2}^{1/2}$$

   $$= 2\pi\sqrt{5} \approx 14{,}04$$



Gambar 31

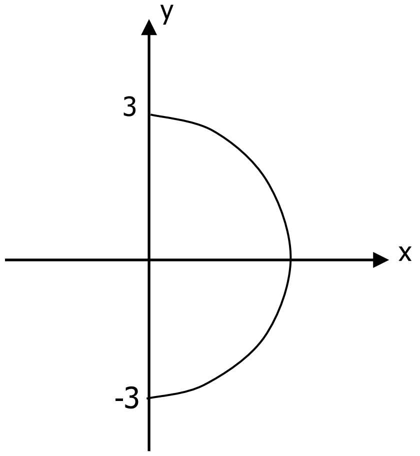
2. Tentukan luas permukaan yang terbentuk apabila kurva $x = \sqrt{9 - y^2}$; diputar mengelilingi sumbu y.

Jawab :

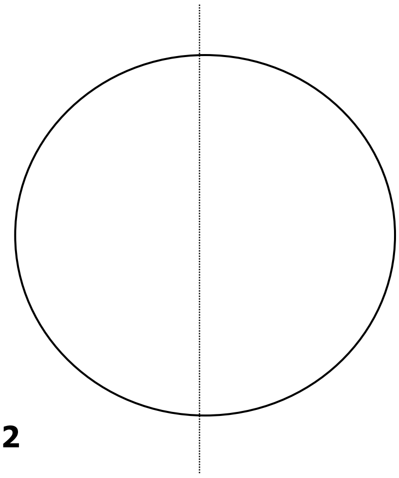
Dari $x = \sqrt{9 - y^2}$; diperoleh $x' = -\dfrac{y}{\sqrt{9 - y^2}}$

$$A = 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2} \sqrt{1 + \frac{y^2}{9 - y^2}}\, dy = 2\pi \int_{-3}^{3} 3\, dy = 12\pi \int_{0}^{3} dy$$

$$= 12\pi\, y \Big|_{0}^{3} = 36\pi \approx 113{,}04$$



Gambar 32



Latihan Soal

Tentukan luas permukaan yang terbentuk apabila: a) Kurva $x = \frac{1}{2} y$, 0 ≤ x ≤ 2 diputar mengelilingi sumbu y, b) Kurva 4x + 3y = 12 ; 0 ≤ x ≤ 3 diputar mengelilingi garis x = 3.

BAB 4
INTEGRAL TAK WAJAR

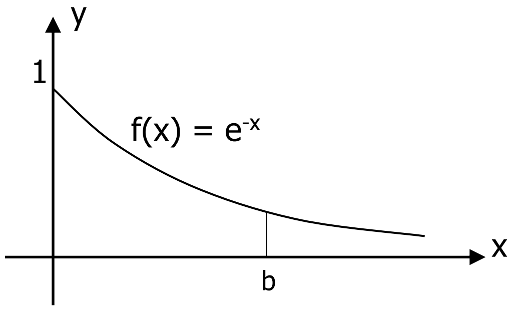
A. Integral Tak Wajar, Batas Tak Terhingga

Dalam mendefinisikan $\int_a^b f(x)\,dx$, telah diandaikan bahwa selang [a, b] terhingga. Walaupun demikian, banyak penerapan integral tentu dalam fisika, ekonomi dan teori peluang yang menghendaki a atau b atau keduanya menjadi tak terhingga. Oleh karena itu kita harus memberikan arti pada lambang seperti berikut ini.

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}\,dx$$

Integral demikian dinamakan *integral tak wajar* dengan batas pengintegralan tak terhingga.

Satu Batas Tak Terhingga Grafik f(x) = e^{-x} pada selang (0, ~) tampak pada Gambar dibawah ini. Integral $\int_0^b e^{-x}\,dx$ mempunyai arti yang jelas bagaimanapun besarnya nilai b. Bahkan kita bisa menghitungnya.



$$\int_0^b e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^b = 1 - e^{-b}$$

Gambar 1

Oleh karena $\lim\limits_{b\to\infty}(1-e^{-b}) = 1,$ *kita dapat mendefinisikan* $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$

Definisi : $$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Apabila limit pada ruas kanan ada dan bernilai terhingga, kita katakan bahwa integral tak wajar yang bersangkutan **konvergen** dan memiliki nilai yang terhingga. Jika tidak, maka integral itu disebut **divergen.**

Contoh

1. Tentukan jika mungkin, $\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\, dx$

Jawab :

$$\int_{a}^{-1} xe^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int_{a}^{-1} e^{-x^2}(-2x)\, dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_{a}^{-1} = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-a^2}$$

Dengan demikian

$$\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\, dx = \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-a^2}\right) = -\frac{1}{2e}$$

Dikatakan bahwa integral tak-wajar tersebut konvergen dengan nilai $-\frac{1}{2e}$.

2. Tentukan jika mungkin, $\int_{0}^{\infty} \sin x\, dx$

Jawab :

$$\int_{0}^{\infty} \sin x\, dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} \sin x\, dx = \lim_{b\to\infty}(-\cos x)\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to\infty}(1-\cos b)$$

Limit ini tidak ada, jadi dikatakan bahwa integral tak-wajar tersebut divergen.

Latihan Soal

1. $\int_{1}^{\infty} e^{x}\, dx$
2. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^5}$
3. $\int_{4}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx$
4. $\int_{-\infty}^{0} e^{3x}\, dx$
5. $\int_{3}^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt{9+x^2}}$
6. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{3x}}$

Kedua Batas Integral Tak Terhingga Kita mulai dengan definisi berikut.

Definisi

$$Apabila \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx \ \ dan \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx \ \ konvergen, maka\ dikatakan\ bahwa$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \ \ konvergen\ dengan\ nilai \ \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$$

Dalam hal lain integral tersebut divergen.

Contoh

Hitunglah integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

Jawab :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+4}\right)\Big|_{a}^{0} + \lim_{b\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4}\right)\Big|_{0}^{b}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(2-\sqrt{a^2+4}\right) + \lim_{b\to\infty} \left(\sqrt{b^2+4}-2\right) = 0$$

Latihan Soal

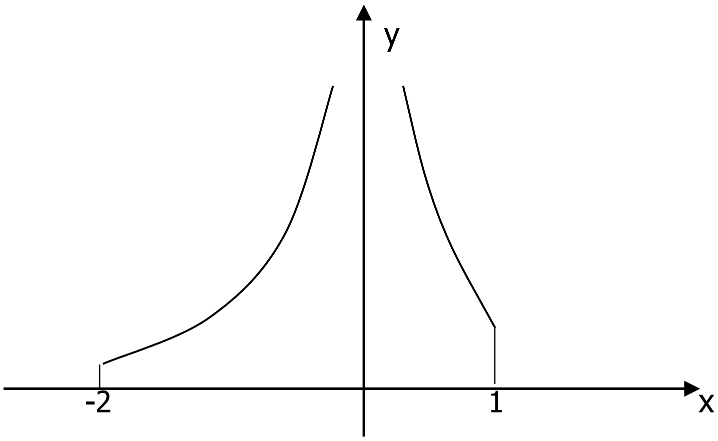
1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4)^2}\,dx$

B. Integral Tak Wajar, Integran Tak Terhingga

Perhatikan integral berikut

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-2}^{1} = -\frac{3}{2} \quad ???$$



Gambar 2

Jika kita perhatikan secara seksama terhadap Gambar 1, tampaknya ada sesuatu yang aneh. Sebab jawaban integral (jika memang ada) tentunya harus merupakan bilangan positif. Dimanakah letak permasalahannya ?
Untuk mengetahui hal itu, maka kita harus memahami bahwa, agar suatu fungsi dapat diintegralkan dalam arti yang biasa, fungsi tersebut harus terbatas. Sedangkan fungsi yang grafiknya tampak pada Gambar 1 merupakan fungsi yang tak terbatas. Dengan demikian fungsi tersebut tidak dapat diintegralkan dalam arti yang biasa. Dikatakan bahwa $\int_{-2}^{1} x^{-2}\,dx$ adalah *integral tak-wajar dengan integran tak terhingga* atau *integral tak terbatas.* Dalam pasal ini kita akan mendefinisikan dan membahas integral-integral itu.

Integran Yang Tak Terhingga Pada Titik Ujung Suatu Selang. Kita berikan definisi untuk integral yang integrannya menuju tak terhingga di titik ujung selang pengintegralan.

Definisi

1. Andaikan f kontinu pada selang setengah buka [a, b) dan andaikan

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$$

Maka, $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

Asalkan limit ini ada dan terhingga. Dalam hal ini dikatakan bahwa integral tersebut konvergen. Dalam hal yang lain disebut divergen.

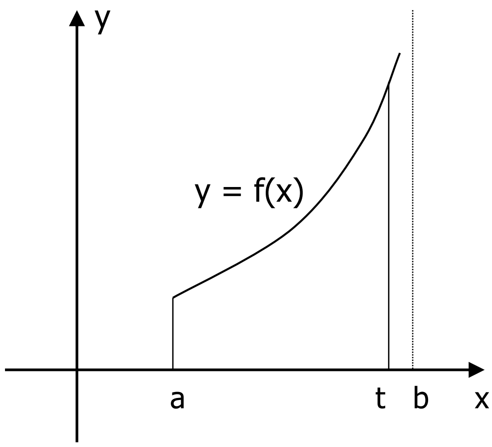
2. Andaikan f kontinu pada selang setengah buka (a, b] dan andaikan

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty.$$

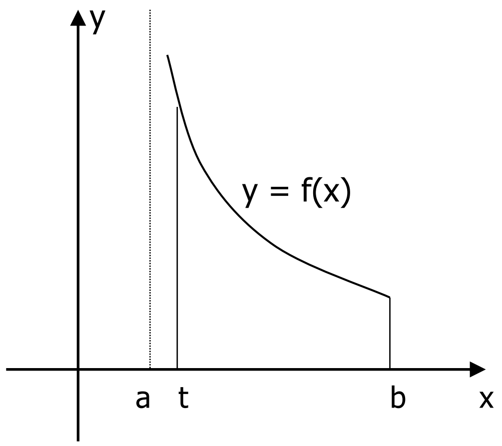
Maka, $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

Asalkan limit ini ada dan terhingga. Dalam hal ini dikatakan bahwa integral tersebut konvergen. Dalam hal yang lain disebut divergen.

Perhatikan arti geometri pada Gambar 2 dan Gambar 3 berikut.



Gambar 3



Gambar 4

Contoh

Hitunglah integral tak-wajar $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Jawab :

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{t\to 2^-}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{t\to 2^-}\left(\arcsin(\frac{x}{2})\right)\Big|_0^t$$

$$= \lim_{t\to 2^-}\left(\arcsin(\frac{t}{2}) - \arcsin(\frac{0}{2})\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Latihan Soal

1. $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

2. $\int_0^1 \frac{dx}{x}$

3. $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$

4. $\int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$

Definisi

Andaikan f kontinu pada selang [a, b], kecuali di c dengan a<c<b dan andaikan $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$. Didefinisikan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

asalkan kedua integral diruas kanan konvergen. Jika tidak, maka Integral tersebut divergen.

Contoh

1. Buktikan bahwa $\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$ divergen.

   Bukti :

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to 0^-} \int_{-2}^{t} \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 0^-} \left(-\frac{1}{x} \right)\Bigg|_{-2}^{t} + \lim_{t\to 0^+} \left(-\frac{1}{x} \right)\Bigg|_{t}^{1} = \lim_{t\to 0^-} (-\frac{1}{t} - \frac{1}{2}) + \lim_{t\to 0^+} (-1 + \frac{1}{t}) = \infty \ (terbukti)$$

2. Hitunglah integral tak wajar $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

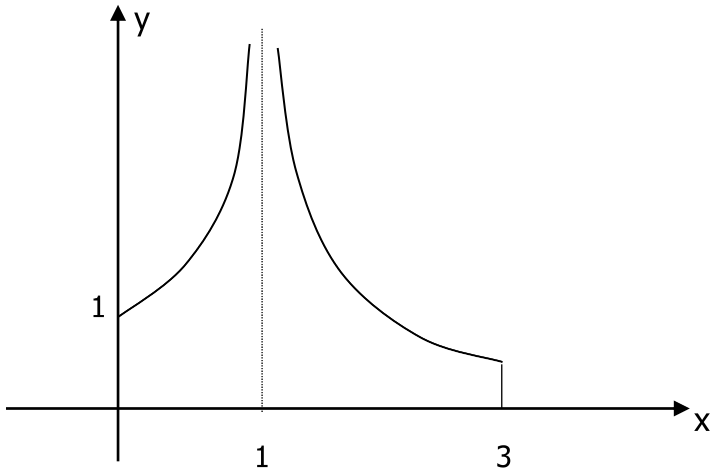
Jawab :

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{s\to 1^-} \int_0^s \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{t\to 1^+} \int_t^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{s\to 1} \left(3(x-1)^{1/3} \right)\Big|_0^s + \lim_{t\to 1^+} \left(3(x-1)^{1/3} \right)\Big|_t^3$$

$$= 3\lim_{s\to 1^-} \left((s-1)^{1/3} + 1 \right) + 3\lim_{t\to 1^+} \left(2^{1/3} - (t-1)^{1/3} \right)$$

$$= 3 + 3(2^{1/3})$$



Gambar 5

Latihan Soal

1. $\displaystyle\int_{-3}^{2}\frac{1}{x^4}\,dx$

2. $\displaystyle\int_{2}^{4}\frac{dx}{(3-x)^{2/3}}$

3. $\displaystyle\int_{-3}^{0}\frac{x}{(x^2-4)^{2/3}}\,dx$

4. $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{3}{x^2+x-2}\,dx$

C. Soal-soal

Soal-soal Bab 1

I. Hitunglah integral tak tentu berikut ini !

1. $\int (x^2+1)^2\,dx$
2. $\int y^2(y^2-3)\,dy$
3. $\int \frac{x^4-2x^3+1}{x^2}\,dx$
4. $\int (3\sin t - 2\cos t)\,dt$
5. $\int (3x+1)^4\,3\,dx$
6. $\int (x^2-4)^3\,2x\,dx$
7. $\int (5x^2+1)(5x^3+3x-8)^6\,dx$
8. $\int \sin^4 x\cos x\,dx$
9. $\int (\sin^5 x^2)(x\cos x^2)\,dx$
10. $\int (x^2+1)^3\,x^2\,dx$

II. Hitunglah integral tentu berikut !

1. $\int_0^2 x^3\,dx$
2. $\int_{-1}^2 (3x^2-2x+3)\,dx$
3. $\int_1^4 \frac{1}{w^2}\,dw$
4. $\int_0^4 \sqrt{t}\,dt$
5. $\int_{-4}^{-2}\left(y^2+\frac{1}{y^3}\right)dy$
6. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x\,dx$
7. $\int_0^1 (x^2+1)^{10}\,2x\,dx$
8. $\int_{-1}^3 \frac{1}{(t+2)^2}\,dt$
9. $\int_5^8 \sqrt{3x+1}\,dx$
10. $\int_{-3}^3 \sqrt{7+2t^2}\,8t\,dt$
11. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 x\sin x\,dx$
12. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (2x+\sin x)\,dx$
13. $\int_0^4 (\sqrt{x}+\sqrt{2x+1})\,dx$
14. $\int_{-4}^{-1} \frac{1-s^4}{2s^2}\,ds$
15. $\int_0^1 (x^2+2x)^2$
16. $\int_a^{8a} (a^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}})^3\,dx$

III. Tentukan G'(x), jika diketahui G(x) sebagai berikut !

1. $G(x) = \int_{-6}^{x} (2t+1)\, dt$

2. $G(x) = \int_{0}^{x} (t^2 + t)\, dt$

3. $G(x) = \int_{1}^{x} \sqrt{1+t^4}\, dt$

4. $G(x) = \int_{0}^{x} \sin^4 u \tan u\, du$

5. $G(x) = \int_{x}^{\frac{1}{4}\pi} u \tan u\, du$

6. $G(x) = \int_{x}^{1} x^2 \sqrt{u^2+1}\, du$

7. $G(x) = \int_{0}^{\sin x} (u^2 + \cos u)\, du$

8. $G(x) = \int_{1}^{x^2+1} \sqrt{2+\sin v}\, dv$

9. $G(x) = \int_{x}^{x^3} \sqrt{1+s^4}\, ds$

10. $G(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} u^2\, du$

IV. Hitunglah integral – integral berikut !

1. $\int \frac{4}{2x+1}\, dx$

2. $\int \frac{2}{4x-3}\, dx$

3. $\int \frac{x}{x^2+4}\, dx$

4. $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$

5. $\int \frac{2}{x(\ln x)^2}\, dx$

6. $\int_{0}^{3} \frac{x^3}{x^4+1}\, dx$

7. $\int_{0}^{1} \frac{x+1}{x^2+2x+2}\, dx$

8. $\int \frac{4x+2}{x^2+x+5}$

9. $\int e^{3x+1}\, dx$

10. $\int x e^{x^2-3}\, dx$

11. $\int (x+3)e^{x^2+6x}\, dx$

12. $\int \frac{e^x}{e^x-1}\, dx$

13. $\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}\, dx$

14. $\int e^{x+e^x}\, dx$

15. $\int_{0}^{1} e^{2x+3}\, dx$

16. $\int_{1}^{2} \frac{e^{3/x}}{x^2}\, dx$

17. $\int \frac{e^{3x}}{1-2e^{3x}}\, dx$

18. $\int x^2 e^{2x^3}\, dx$

Soal-soal Bab 2

I. Hitunglah integral berikut.

1. $\int (x-1)^4$
2. $\int \sqrt{2x}\, dx$
3. $\int x(x^2+1)^4\, dx$
4. $\int x\sqrt{x^2+2}$
5. $\int \frac{dx}{x^2+1}$
6. $\int \frac{e^x}{1+2e^x}\, dx$
7. $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$
8. $\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx$
9. $\int 3t\sqrt{2+t^2}\, dt$
10. $\int \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$
11. $\int \frac{\tan z}{\cos z}\, dz$
12. $\int \frac{e^{\sin x}}{\sec x}\, dx$
13. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^4}}$
14. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx$
15. $\int \frac{2x^2+x}{x+1}\, dx$
16. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{1-\sin^2 x}\, dx$
17. $\int e^{\sin x \cos x} \cos 2x\, dx$
18. $\int \frac{\cos(\ln 4x^2)}{x}\, dx$
19. $\int \frac{\csc^2(\ln x)}{x}\, dx$
20. $\int \frac{5e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\, dx$
21. $\int \frac{x}{x^4+1}\, dx$
22. $\int \frac{5e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\, dx$
23. $\int_0^1 x10^{x^2}\, dx$
24. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x}\, dx$
25. $\int \frac{z+2}{\cot(z^2+4z-3)}\, dz$
26. $\int e^x \sec e^x\, dx$
27. $\int \frac{x^2\cos(x^3-2)}{\sin^2(x^3-2)}\, dx$
28. $\int \frac{y}{\sqrt{16-9y^4}}\, dy$
29. $\int \frac{\sec x \tan x}{1+\sec^2 x}\, dx$
30. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{16+\cos^2 x}\, dx$
31. $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx$
32. $\int \frac{x+1}{9x^2+18x+10}\, dx$

II. Hitunglah integral berikut.

1. $\int \cos^2 x\,dx$

2. $\int \sin^4 5x\,dx$

3. $\int \cos^3 x\,dx$

4. $\int \sin^3 x\,dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\,dx$

6. $\int \tan^3 y\,dy$

7. $\int \sin^7 3x \cos^2 3x\,dx$

8. $\int \sin^3 x \sqrt{\cos x}\,dx$

9. $\int \sin^{1/2} x \cos^3 x\,dx$

10. $\int \sin^4 2t \cos^4 2t\,dt$

11. $\int \tan^3 3x \sec^3 3x\,dx$

12. $\int \cot x \csc^3 x\,dx$

13. $\int \tan^{-3} x \sec^2 x\,dx$

14. $\int \sin 4y \cos 5y\,dy$

15. $\int \cos y \cos 4y\,dy$

16. $\int \sin 3t \sin t\,dt$

III. Hitunglah integral berikut.

1. $\int x\sqrt{x+3}\,dx$

2. $\int x\sqrt[3]{x+4}\,dx$

3. $\int \frac{t}{\sqrt{2t+7}}\,dt$

4. $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

5. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+2}$

6. $\int_0^4 \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,dt$

7. $\int 7x(2x+1)^{3/2}\,dx$

8. $\int x(x+2)^{2/3}\,dx$

9. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx$

10. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$

12. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^{3/2}}$

13. $\int_5^8 \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}}$

14. $\int_2^5 \frac{\sqrt{t^2-4}}{t^3}\,dt$

x

15. $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

16. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

17. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx$

18. $\int \sqrt{5-4x-x^2}\,dx$

19. $\int x\sqrt{9-x^2}\,dx$

20. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

21. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

22. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-4x^2}}$

23. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9x^2-4}}$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

IV. Gunakan pengintegralan parsial untuk menghitung integral berikut.

1. $\int xe^x\,dx$

2. $\int xe^{3x}\,dx$

3. $\int x\sin 3x\,dx$

4. $\int \ln 3x\,dx$

5. $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

6. $\int x\sec^2 5x\,dx$

7. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$

8. $\int x^2e^x\,dx$

9. $\int e^x\sin x\,dx$

10. $\int e^{2x}\cos 2x\,dx$

11. $\int x^2\cos x\,dx$

12. $\int \ln^2 x\,dx$

13. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} x\csc^2 x\,dx$

14. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^3 x\,dx$

15. $\int xa^x\,dx$

16. $\int \sin(\ln x)\,dx$

V. Gunakan rumus reduksi untuk menghitung integral berikut.

1. $\int \cos^6 x\,dx$

2. $\int \cos^7 x\,dx$

3. $\int \sin^5 x\,dx$

4. $\int \sin^4 x\,dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\,dx$

6. $\int_0^{\pi/2} \cos^6 x\,dx$

VI. Gunakan metode pecahan parsial untuk menghitung integral berikut.

1. $\int \frac{2}{x^2+2x}\,dx$

2. $\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$

3. $\int \frac{5x+3}{x^2-9}\,dx$

4. $\int \frac{x-11}{x^2+3x-4}\,dx$

5. $\int \frac{3x-13}{x^2+3x-10}\,dx$

6. $\int \frac{2x^2+x-4}{x^3-x^2-2x}\,dx$

7. $\int \frac{x^4+8x^2+8}{x^3-4x}\,dx$

8. $\int \frac{x+1}{(x-3)^2}\,dx$

9. $\int \frac{3x^2-21x+32}{x^3-8x^2+16x}\,dx$

10. $\int \frac{2x^2+x-8}{x^3+4x}\,dx$

11. $\int \frac{2x^2-3x-36}{(2x-1)(x^2+9)}\,dx$

12. $\int \frac{x^3-8x^2-1}{(x+3)(x-2)(x^2+1)}\,dx$

13. $\int \frac{20x-11}{(3x+2)(x^2-4x+5)}\,dx$

14. $\int \frac{x^3-4x}{(x^2+1)^2}\,dx$

Soal-soal Bab 3

I. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva berikut.

1. $y = 4 - \frac{1}{3}x^2,\ y = 0,\ antara\ x = 0\ dan\ x = 3$
2. $y = 4x - x^2,\ y = 0\ antara\ x = 1\ dan\ x = 3$
3. $y = x^2 - 2x - 3,\ y = 0,\ antara\ x = 0\ dan\ x = 2$
4. $y = \frac{1}{2}(x^2 - 10),\ y = 0,\ antara\ x = -2\ dan\ x = 3$
5. $y = x^3,\ y = 0,\ x = -1,\ x = 2$
6. $y = \sqrt[3]{x},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 8$
7. $y = x^2,\ y = x + 2$
8. $y = x^2 - 2,\ y = 2x^2 + x - 4$
9. $y = 2\sqrt{x},\ y = 2x - 4,\ x = 0$
10. $x = 6y - y^2,\ x = 0$
11. $x = -y^2 + y + 2,\ x = 0$
12. $x = 4 - y^2,\ x + y - 2 = 0$
13. $x = y^2 - 3y,\ x - y + 3 = 0$
14. $y^2 - 2x = 0,\ y^2 + 4x - 12 = 0$
15. $y = \sqrt{x-4}\ y = 0,\ x = 8$
16. $y = x^2 - 4x + 3,\ x - y - 1 = 0$
17. $y = x^2 - 4x,\ \ y = -x^2$
18. $x = y^4,\ x = 2 - y^4$
19. $y = x + 6, y = x^3, x + 2y = 0$
20. $Segitiga\ dengan\ titik\ sudut$ $(-1,4),(2,-2)\ dan\ (5,1)$

II. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk, jika :

1. Daerah berikut ini diputar dengan sumbu putar sumbu x.

$a.\ y = \frac{1}{4}x^2,\ x = 4, y = 0$

$b.\ y = x^3,\ x = 2,\ y = 0$

$c.\ y = \frac{1}{x},\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$

$d.\ y = x^{3/2},\ y = 0, antara\ x = 1\ dan\ x = 3$

$e.\ y = \sqrt{4 - x^2},\ y = 0,\ antara\ x = -1\ dan\ x = 2$

2. Daerah berikut ini diputar dengan sumbu putar sumbu y.

$a. x = y^2,\ x = 0,\ y = 2$ $\qquad$ $b. x = \dfrac{2}{y},\ y = 1,\ y = 6,\ x = 0$

$c. x = \sqrt{y},\ y = 4,\ x = 0$ $\qquad$ $d. x = y^{2/3},\ y = 8,\ x = 0$

$e. x = y^{3/2},\ y = 4,\ x = 0$ $\qquad$ $f. x = \sqrt{9 - y^2},\ x = 0$

3. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh garis y = 4x dan parabola y = $4x^2$ diputar dengan sumbu putar sumbu x.

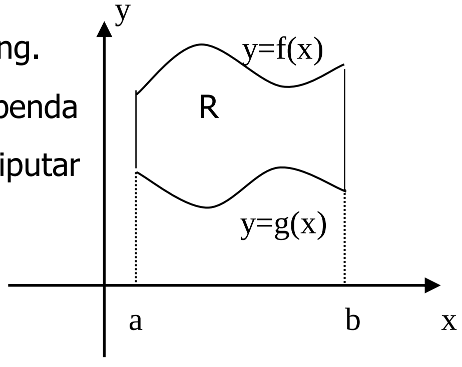
4. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh garis y = 4x dan parabola y = $4x^2$ diputar dengan sumbu putar sumbu y.

5. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk apabila daerah dalam kuadran pertama yang dibatasi oleh parabola $3x^2 - 16y + 48 = 0$ dan $x^2 - 16y + 80 = 0$ dan sumbu y diputar dengan sumbu putar garis y = 2.

6. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh $y = x^{1/2}$, x=4, y = 0 diputar dengan sumbu putar sumbu y.

7. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh $y = 4 - x^2$ ($x \geq 0$), x = 0, y = 0 diputar dengan sumbu putar garis x=2.

8. Perhatikan daerah pada Gambar disamping. Susunlah sebuah integral untuk volume benda putar yang terbentuk apabila daerah R diputar dengan sumbu putar :
   a. Sumbu x $\qquad$ c. Garis x = a
   b. Sumbu y $\qquad$ d. Garis x = b



III. Hitunglah :

1. Panjang ruas garis dengan persamaan y = 3x + 5 antara x = 1 dan x = 4
2. Panjang ruas garis dengan persamaan 2x – 4y + 6 = 0 antara y = 0 dan y = 2.
3. Panjang kurva $y = 2x^{3/2}$antara x = 1/3 dan x = 7
4. Panjang kurva $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$ antar x = 1 dan x = 8
5. Panjang kurva $x = t^3$, $y = t^2$; $0 \le t \le 4$
6. Panjang kurva $x = 3t^2 + 2$, $y = 2t^3 - 1$; $1 \le t \le 3$
7. Panjang kurva x = 3 sin t, y = 3 cos t – 3 ; $0 \le t \le 2\pi$

D. Hitunglah luas permukaan yang terbentuk, apabila :

1. Kurva berikut diputar mengelilingi sumbu x.

$a. y = 6x,\ 0 \le x \le 1$

$b. y = \sqrt{25 - x^2},\ -2 \le x \le 3$

$c. y = \dfrac{x^3}{3},\ 1 \le x \le \sqrt{7}$

$d. y = \dfrac{x^6 + 2}{8x^2},\ 1 \le x \le 3$

$e. x = t,\ y = t^3,\ 0 \le t \le 1$

$f. x = 1 - t^2,\ y = 2t,\ 0 \le t \le 1$

2. Kurva berikut diputar mengelilingi sumbu y

$a. x = 8y + 1,\ 0 \le y \le 2$

$b. x = y^3,\ 0 \le y \le 1$

$c. y = x^2,\ 0 \le x \le 2\sqrt{3}$

$d. y = \frac{1}{2}x^2 - 1,\ 0 \le x \le 2\sqrt{2}$

3. Kurva y = sin x , $0 \le x \le \pi$, diputar mengelilingi garis y = -1.
4. Kurva $y = x^2 + 2x$, $1 \le x \le 3$, diputar mengelilingi garis y = -2.
5. Kurva y = sin x, $0 \le x \le \pi$, diputar mengelilingi garis x = 0.
6. Kurva $y = \sqrt{x - 4},\ 4 \le x \le 8$, diputar mengelilingi garis x = 2.
7. Kurva $y = \sqrt{x^2 = x}\ , 2 \le x \le 4$, diputar mengelilingi garis x = 2.
8. Kurva $y = x^4 + 2$, $0 \le x \le 2$, diputar mengelilingi garis y = 2.
9. Kuirva $x = t^2$, y = sin t, $0 \le t \le \pi$, diputar mengelilingi garis y = -1.
10. Kurva x = a cos t, y = a sin t, $0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$, diputar mengelilingi x = -a.

Soal-soal Bab 4

Hitunglah integral tak wajar berikut ini.

1. $\int_{1}^{\infty} e^{x}\, dx$

2. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^5}$

3. $\int_{4}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx$

4. $\int_{-\infty}^{0} e^{3x}\, dx$

5. $\int_{3}^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt{9+x^2}}$

6. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{3x}}$

7. $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

8. $\int_{2}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx$

9. $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx$

10. $\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\, dx$

11. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\, dx$

12. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx$

13. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4)^2}\, dx$

14. $\int_{0}^{\infty} e^{-x} \sin x\, dx$

15. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$

16. $\int_{3}^{7} \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$

17. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

18. $\int_{0}^{9} \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$

19. $\int_{-3}^{2} \frac{1}{x^4}\, dx$

20. $\int_{2}^{4} \frac{dx}{(3-x)^{2/3}}$

21. $\int_{-3}^{0} \frac{x}{(x^2-4)^{2/3}}\, dx$

22. $\int_{0}^{\pi/4} \tan 2x\, dx$

23. $\int_{0}^{3} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$

24. $\int_{0}^{2} \frac{3}{x^2+x-2}\, dx$

DAFTAR PUSTAKA

Edwin J. Purcell dan Dale Varberg, I Nyoman Susila, Bana Kartasasmita dan Rawuh(penj.). 2010. *Kalkulus Jilid Satu.* Tangerang : Binarupa Aksara.

Frank Ayres dan Elliot Menderson, Nur Danarjaya. 2004. *Kalkulus.* Jakarta : Erlangga.

Hazrul Iswadi. 2007. *Kalkulus.* Malang : Bayumedia

Heri Purwanto. 2005. *Kalkulus.*Jakarta : Ercontara Rajawali.